14. HAFTA

BLM323

SAYISAL ANALİZ

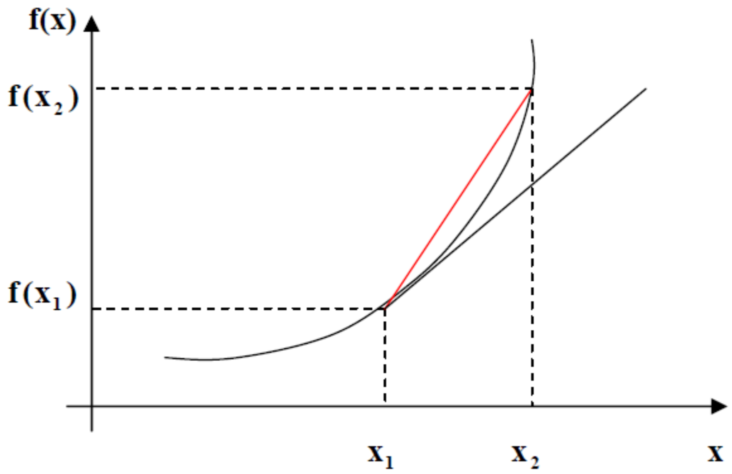
Okt. Yasin ORTAKCI

yasinortakci@karabuk.edu.tr

KBUZEM
Karabük Üniversitesi
Uzaktan Eğitim Uygulama ve Araştırma Merkezi

SAYISAL TÜREV

Türevin tanımı:



$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \lim_{(x_2 - x_1) \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Bir fonksiyonun Taylor serisine açılımından faydalanılarak aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\,h + \frac{f''(x_i)}{2} h^2 + \ldots \qquad h = x_{i+1} - x_i$$

Buradan $f'(x_i)$ çekildiğinde;

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2} h + O(h^2)$$

elde edilir.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

şeklinde yazılabilir veya

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

yukarıdaki ikinci türev formülü kullanılarak $f'(x_i)$ ifadesi aşağıdaki formüle dönüşebilir:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

İleri Farklar Metodu İle Türevler

Birinci mertebeden türev;

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

veya

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

formülleri ile bulunabilir.

İkinci mertebeden türev;

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

veya

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

formülleri ile bulunabilir.

Üçüncü mertebeden türev;

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

veya

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

formülleri ile bulunabilir.

Dördüncü mertebeden türev;

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

veya

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24\,f(x_{i+3}) - 26\,f(x_{i+2}) - 14\,f(x_{i+1}) + 3\,f(x_i)}{h^4}$$

formülleri ile bulunabilir.

Geri Farklar Metodu İle Türevler

Birinci mertebeden türev;

$$f^{'}(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

veya

$$f^{'}(x_i) = \frac{3\,f(x_i) - 4\,f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

formülleri ile bulunabilir.

İkinci mertebeden türev;

$$f^{''}(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

veya

$$f^{''}(x_i) = \frac{2\,f(x_i) - 5\,f(x_{i-1}) + 4\,f(x_{i-2}) - \,f(x_{i-3})}{h^2}$$

formülleri ile bulunabilir.

Üçüncü mertebeden türev;

$$f^{'''}(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - \,f(x_{i-3})}{h^3}$$

veya

$$f^{'''}(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18\,f(x_{i-1}) + 24\,f(x_{i-2}) - 14\,f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$$

formülleri ile bulunabilir.

Dördüncü mertebeden türev;

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4\,f(x_{i-1}) + 6\,f(x_{i-2}) - \,4\,f(x_{i-3}) + \,f(x_{i-4})}{h^4}$$

veya

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14\,f(x_{i-1}) + 26\,f(x_{i-2}) - 24\,f(x_{i-3}) + \ 11\,f(x_{i-4}) - 2\,f(x_{i-5})}{h^4}$$

formülleri ile bulunabilir.

Merkezi Farklar Metodu İle Türevler

Birinci mertebeden türev;

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

veya

$$f'(x_i) = \frac{-\,f(x_{i+2}) + 8\,f(x_{i+1}) + 8\,f(x_{i-1}) + \ f(x_{i-2})}{12h}$$

formülleri ile bulunabilir.

İkinci mertebeden türev;

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

veya

$$f''(x_i) = \frac{-\,f(x_{i+2}) + 16\,f(x_{i+1}) - 30\,f(x_i) + 16\,f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$$

formülleri ile bulunabilir.

Üçüncü mertebeden türev;

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2\,f(x_{i+1}) + 2\,f(x_{i-1}) - \ f(x_{i-2})}{2h^3}$$

veya

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) + 8\,f(x_{i+2}) - 13\,f(x_{i+1}) + 13\,f(x_{i-1}) - 8\,f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$$

formülleri ile bulunabilir.

Dördüncü mertebeden türev;

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4\,f(x_{i+1}) + 6\,f(x_i) - \ 4\,f(x_{i-1}) + \ f(x_{i-2})}{h^4}$$

veya

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12\,f(x_{i+2}) - 39\,f(x_{i+1}) + 56\,f(x_i) - 39\ f(x_{i-1}) + 12\,f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$$

formülleri ile bulunabilir.

Örnek: $f(x) = \ln x$ $\quad f'(5) = ?$ $\quad f''(5) = ?$ $\quad f'''(5) = ?$ Bu değerleri ileri farklar türevi ile bulunuz.

Analitik Çözüm:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad ve \quad f'(5) = 0,2$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ve \quad f''(5) = -0,04$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad ve \quad f'''(5) = 0,016$$

Sayısal Çözüm:

$h = 0.01$ alalım. $x_{i+1} - x_i = h$ olmak üzere;

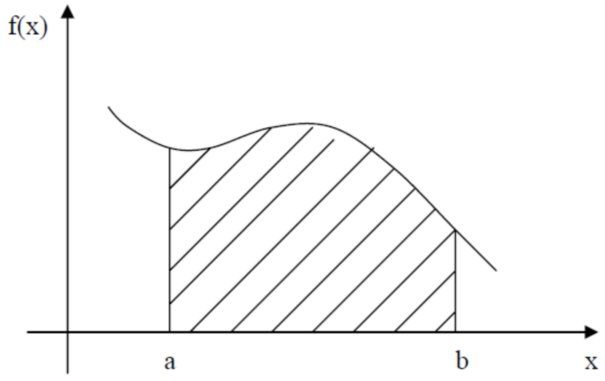
$x_0 = 5$ ise $x_1 = 5.01$, $x_2 = 5.02$, $x_3 = 5.03$ olur.

$$f'(x) = \frac{\ln(5+0,01) - \ln(5)}{5,01 - 5} = 0,199800266 \cong 0,2$$

$$f''(x) = \frac{\ln(5,02) - 2\ln(5,01) + \ln(5)}{0,01^2} = -0,0398405 \cong -0,04$$

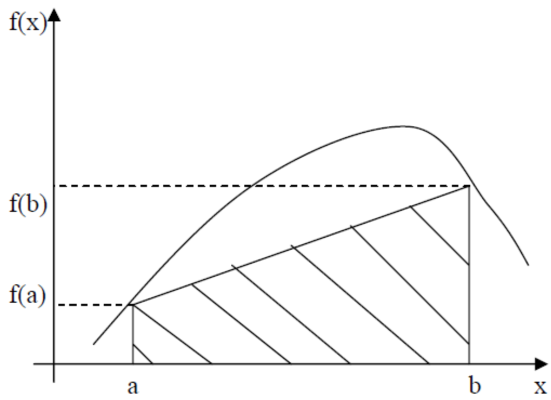
$$f'''(x_i) = \frac{\ln(5,03) - 3\ln(5,02) + 3\ln(5,01) - \ln(5)}{0,01^3} = 0,0158569 \cong 0,016$$

SAYISAL İNTEGRAL



$$I = \int_a^b f(x)\, d_x$$

1. Trapozoid (Yamuk) Kuralı



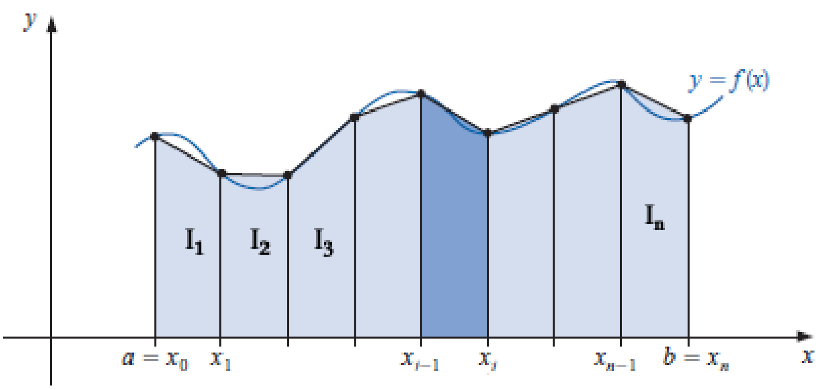
$$I = \int_a^b f(x) d_x \cong \frac{(f(a) + f(b))}{2} \times (b - a)$$

$f(a)$: *yamuğun tavan uzunluğu*

$f(b)$: *yamuğun taban uzunluğu*

$h = (b - a)$: *yamuğun yüksekliği*

İntegral bölgesinin n eşit parçaya bölünerek yamuk kuralını uygularsak;



$$I = \int_a^b f(x) d_x \cong \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \cdots . + \mathrm{I}_n$$

$$I = \int_a^b f(x)d_x = \int_{x_0}^{x_1} f(x) + \int_{x_1}^{x_2} f(x) + \cdots .. + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)$$

$$I \cong I_1 + I_2 + I_3 + \cdots . + I_n$$

$h = x_{i+1} - x_i = \frac{(b-a)}{n}$ olmak üzere

$$I \cong h\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\right] + h\left[\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right] + h\left[\frac{f(x_2) + f(x_3)}{2}\right] + \ ... + h\left[\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right]$$

$$I \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\,[f(x_1) + \ f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)]$$

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Örnek: $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900\,x^4 + \ 400\,x^5$ denklemi için;

$$I = \int_0^{0{,}8} f(x)d_x$$

değerini bulunuz.

Çözüm:

Bu integral analitik olarak çözülürse I=1,64053334 olarak bulunur.

$a = 0$ ve $b = 0.8$ olarak alınırsa;

$n = 8$ için;

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{8} = 0.1$$

olarak bulunur.

$x_0 = 0,\ \ x_1 = 0.1,\quad x_2 = 0.2,\quad x_3 = 0.3,\quad x_4 = 0.4,\quad x_5 = 0.5,\quad x_6 = 0.6,$
$x_7 = 0.7,\quad x_8 = 0.8$

olur.

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$I \cong \frac{0.1}{2}[f(0) + 2[f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.5) + f(0.6) + f(0.7)] + f(0.8)]$$

$f(0) = 0.2, \quad f(0.1) = 1.289, \quad f(0.2) = 1.288, \quad f(0.3) = 1.607,$

$f(0.4) = 2.456, \quad f(0.5) = 3.325, \quad f(0.6) = 3.464,$

$f(0.7) = 2.363, \quad f(0.8) = 2.232$ olarak bulunmuştur. Buna göre;

$I \cong 1.6008$ bulunur.

$\varepsilon_m = |1{,}64053334 - 1.6008| = 0.03973334$

Algoritması

INPUT *endpoints* a, b; *positive* n;

OUTPUT *approximation Total to* I.

Step 1 $h = (b - a)/n$

Step 2 : $Total = f(a) + f(b)$

Step 3 *For* $i = 1, \ldots, n - 1$ *do Steps* 4 *and* 5.

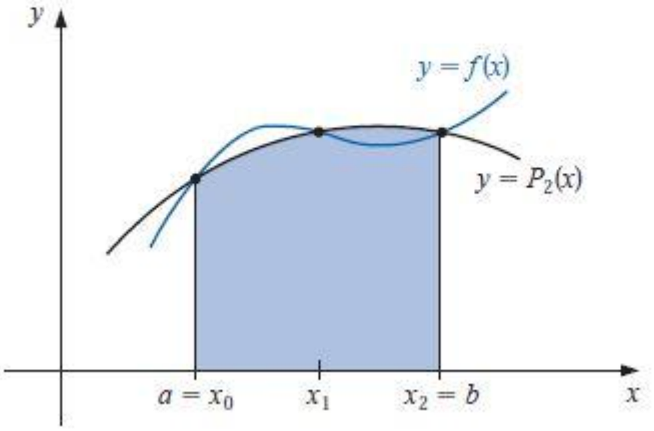
  Step 4 *Set* $x = a + ih$

  Step 5 $Total = Total + 2 * f(x)$

Step 6 $Total = \frac{h}{2} * Total$

---

2. Simpson (1/3) Kuralı



Buradaki 1/3 , h üçe bölündüğü içindir.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Eğer $x_0 = a$ $x_2 = b$ $x_1 = \frac{b+a}{2}$ ve $f_2(x)$ yerine ikinci dereceden Lagrange polinomu alınırsa integral aşağıdaki şekle gelir.

$$I \cong \int_{x_0}^{x_2} [\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)\,]\,dx$$

Bu ıntegral işlemi sonucunda elde edilen ifadede gereken kısaltmalar yapıldıktan sonra integral formülü aşağıdaki şekli alır.

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Eğer (a , b) aralığı n eşit parçaya bölünürse

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

formülü bulunur.

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]$$

Örnek: $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900\,x^4 + \ 400\,x^5$ denklemi için;

$$I = \int_0^{0{,}8} f(x)d_x$$

değerini bulunuz.

Çözüm:

$a = 0$ ve $b = 0.8$ olarak alınırsa;

$n = 8$ için;

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{8} = 0.1$$

olarak bulunur.

$x_0 = 0,\quad x_1 = 0.1,\quad x_2 = 0.2,\quad x_3 = 0.3,\quad x_4 = 0.4,\quad x_5 = 0.5,\quad x_6 = 0.6,$

$x_7 = 0.7,\quad x_8 = 0.8$

olur.

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]$$

$$I \cong \frac{0.1}{3}\left[f(0) + 2\left(f(0.2) + f(0.4) + f(0.6)\right) + 4\left(f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + +f(0.7)\right) + f(0.8)\right]$$

$f(0) = 0.2,\quad f(0.1) = 1.289,\quad f(0.2) = 1.288,\quad f(0.3) = 1.607,$

$f(0.4) = 2.456,\quad f(0.5) = 3.325,\quad f(0.6) = 3.464,$

$f(0.7) = 2.363,\quad f(0.8) = 2.232$ olarak bulunmuştur. Buna göre;

$I \cong 1.6428$ bulunur.

$\varepsilon_m = |1{,}64053334 - 1.6428| = 0.00226666$

Algoritması

$\boldsymbol{INPUT}$ $endpoints\ a, b;\ even\ positive\ integer\ n.$

$\boldsymbol{OUTPUT}$ $approximation\ Total\ to\ I.$

$\boldsymbol{Step}$ **1** $h = (b - a)/n$

$\boldsymbol{Step}$ **2** $Total = f\,(a) + f\,(b)$

$\boldsymbol{Step}$ **3** $For\ i = 1, \ldots, n - 1\ do\ Steps\ 4\ and\ 5.$

  $\boldsymbol{Step}$ **4** $Set\ x = a + ih$

  $\boldsymbol{Step}$ **5** $If\ i\ is\ even\ then\ Total = Total + 2 * f(x)$

    $else\ set\ Total = Total + 4 * f(x)$

$\boldsymbol{Step}$ **6** $Total = \frac{h}{3} * Total$

---

3. Simpson (3/8) Kuralı

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x) d_x \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3\, f(x_1) + 3\, f(x_2) + f(x_3)]$$

$$I \cong I_1 + I_2 + I_3 + \cdots . + I_{n/3}$$

$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3\, f(x_1) + 3\, f(x_2) + f(x_3)] + \frac{3h}{8} [f(x_3) + 3\, f(x_4) + 3\, f(x_5) + f(x_6)] + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{3h}{8} [f(x_{n-3}) + 3\, f(x_{n-2}) + 3\, f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + \mathbf{3}\, [f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + \mathbf{2}[f(x_3)$$
$$+ f(x_6) + \cdots + f(x_{n-3})] + f(x_n)]$$

$$I \cong \frac{3h}{3} \left[f(x_0) + 3 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} [f(x_{3i-2}) + f(x_{3i-1})] + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} f(x_{3i}) + f(x_n) \right]$$

Algoritması

INPUT *endpoints* $a, b;\ n = 3k - 1$

OUTPUT *approximation Total to I.*

***Step* 1** $h = (b - a)/n.$

***Step* 2** : $Total = f\,(a) + f\,(b);$

***Step* 3** *For* $i = 1, \ldots, n - 1$ *do Steps* 4 *and* 5.

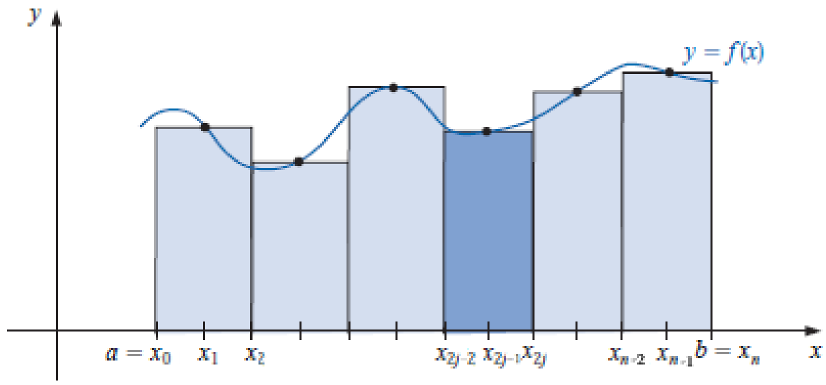
  ***Step* 4** *Set* $x = a + ih.$

  ***Step* 5** *If i is multiple of* 3 *then* $Total = Total + 2 * f(x)$

    else set $Total = Total + 3 * f(x)$

***Step* 6** $Total = \dfrac{3h}{8} * Total$

4. Midpoint (Orta Nokta) Kuralı



$$I \cong I_1 + I_2 + I_3 + \cdots . + I_{n/2}$$

$$I \cong (x_2 - x_0) f(x_1) + \ (x_4 - x_2) f(x_3) + \cdots + (x_n - x_{n-2}) f(x_{n-1})$$

$$I \cong 2h\, f(x_1) + \ 2h\, f(x_3) + \cdots + 2h\, f(x_{n-1})$$

$$I \cong 2h \left[\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) \right]$$

Algoritması

$\boldsymbol{INPUT}$ $endpoints\ a, b;\ even\ posivite\ integer\ n$

$\boldsymbol{OUTPUT}$ $approximation\ Total\ to\ I.$

$\boldsymbol{Step\ 1}$ $h\ =\ (b\ -\ a)/n.$

$\boldsymbol{Step\ 3}$ $For\ i\ =\ 1, \ldots, \frac{n}{2}\ \ do\ Steps\ 4\ and\ 5.$

  $\boldsymbol{Step\ 4}$ $Set\ x\ =\ a\ + (2i - 1)h$

  $\boldsymbol{Step\ 5}$ $Total\ =\ Total +\ 2h * \ f(x)$

Kaynakça

- Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Bayıroğlu, (2006), "Sayısal Yöntemler Ders Notları" , İstanbul.
- Richard L. Burden, Richard L. Burden (2009). "Numerical Analysis" Brooks/Cole Cengage Learning, Boston.