Olasılık ve İstatistik hatırlatma VIP

Afshine Amidi ve Shervine Amidi

April 30, 2019

Ayyüce Kızrak ve Başak Buluz tarafından çevrilmiştir

Olasılık ve Kombinasyonlara Giriş

❒ **Örnek alanı** – Bir deneyin olası tüm sonuçlarının kümesidir, deneyin örnek alanı olarak bilinir ve S ile gösterilir.

❒ **Olay** – Örnek alanın herhangi bir E alt kümesi, olay olarak bilinir. Yani bir olay, deneyin olası sonuçlarından oluşan bir kümedir. Deneyin sonucu E'de varsa, E'nin gerçekleştiğini söyleriz.

❒ **Olasılık aksiyomları** – Her E olayı için, E olayının meydana gelme olasılığı $P(E)$ olarak ifade edilir:

$$(1)\quad \boxed{0\leqslant P(E)\leqslant 1}\qquad (2)\quad \boxed{P(S)=1}\qquad (3)\quad \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^nE_i\right)=\sum_{i=1}^nP(E_i)}$$

❒ **Permütasyon** – Permütasyon, n nesneler havuzundan r nesnelerinin belirli bir sıra ile düzenlenmesidir. Bu tür düzenlemelerin sayısı $P(n, r)$ tarafından aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boxed{P(n, r)=\frac{n!}{(n-r)!}}$$

❒ **Kombinasyon** – Bir kombinasyon, sıranın önemli olmadığı n nesneler havuzundan r nesnelerinin bir düzenlemesidir. Bu tür düzenlemelerin sayısı $C(n,r)$ tarafından aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boxed{C(n, r)=\frac{P(n, r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Not: $0\leqslant r\leqslant n$ için $P(n,r)\geqslant C(n,r)$ değerine sahibiz.

Koşullu Olasılık

❒ **Bayes kuralı** – A ve B olayları için $P(B)>0$ olacak şekilde:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

Not: $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(A|B)P(B)$.

❒ **Parça** – Tüm i değerleri için $A_i\neq\varnothing$ olmak üzere $\{A_i, i\in[\![1,n]\!]\}$ olsun. $\{A_i\}$ bir parça olduğunu söyleriz eğer:

$$\boxed{\forall i\neq j, A_i\cap A_j=\emptyset\quad\textrm{ ve }\quad\bigcup_{i=1}^nA_i=S}$$

Not: Örneklem uzaydaki herhangi bir B olayı için $P(B)=\displaystyle\sum_{i=1}^nP(B|A_i)P(A_i)$'ye sahibiz.

❒ **Genişletilmiş Bayes kuralı formu** – $\{A_i, i\in[\![1,n]\!]\}$ örneklem uzayının bir bölümü olsun. Elde edilen:

$$\boxed{P(A_k|B)=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^nP(B|A_i)P(A_i)}}$$

❒ **Bağımsızlık** – İki olay A ve B birbirinden bağımsızdır ancak ve ancak eğer:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

Rastgele Değişkenler

❒ **Rastgele değişken** – Genellikle X olarak ifade edilen rastgele bir değişken, bir örneklem uzayındaki her öğeyi gerçek bir çizgiye eşleyen bir fonksiyondur.

❒ **Kümülatif dağılım fonksiyonu (KDF)** – Monotonik olarak azalmayan ve $\underset{x\rightarrow-\infty}{\textrm{lim}}F(x)=0$ ve $\underset{x\rightarrow+\infty}{\textrm{lim}}F(x)=1$ olacak şekilde kümülatif dağılım fonksiyonu F şu şekilde tanımlanır:

$$\boxed{F(x)=P(X\leqslant x)}$$

Not: $P(a < X\leqslant B)=F(b)-F(a)$.

❒ **Olasılık yoğunluğu fonksiyonu (OYF)** – Olasılık yoğunluğu fonksiyonu f, X'in rastgele değişkenin iki bitişik gerçekleşmesi arasındaki değerleri alması ihtimalidir.

❒ **OYF ve KDF'yi içeren ilişkiler** – Ayrık (D) ve sürekli (C) olaylarında bilmeniz gereken önemli özelliklerdir.

Olay	**KDF** F	**OYF** f	**OYF Özellikleri**
(D)	$F(x)=\displaystyle\sum_{x_i\leqslant x}P(X=x_i)$	$f(x_j)=P(X=x_j)$	$0\leqslant f(x_j)\leqslant1$ ve $\displaystyle\sum_{j}f(x_j)=1$
(C)	$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^xf(y)dy$	$f(x)=\displaystyle\frac{dF}{dx}$	$f(x)\geqslant0$ ve $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

❒ **Varyans** – Genellikle $\textrm{Var}(X)$ veya σ^2 olarak ifade edilen rastgele değişkenin varyansı, dağılım fonksiyonunun yayılmasının bir ölçüsüdür. Aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\boxed{\textrm{Var}(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-E[X]^2}$$

❒ **Standart sapma** – Genellikle σ olarak ifade edilen rastgele bir değişkenin standart sapması, gerçek rastgele değişkenin birimleriyle uyumlu olan dağılım fonksiyonunun yayılmasının bir ölçüsüdür. Aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\boxed{\sigma=\sqrt{\textrm{Var}(X)}}$$

❒ **Beklenti ve Dağılım Momentleri** – Burada, ayrık ve sürekli durumlar için beklenen değer $E[X]$, genelleştirilmiş beklenen değer $E[g(X)]$, k. Moment $E[X^k]$ ve karakteristik fonksiyon $\psi(\omega)$ ifadeleri verilmiştir :

Olay	$E[X]$	$E[g(X)]$	$E[X^k]$	$\psi(\omega)$
(D)	$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_if(x_i)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^n g(x_i)f(x_i)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^kf(x_i)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x_i)e^{i\omega x_i}$
(C)	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^kf(x)dx$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\omega x}dx$

❒ **Rastgele değişkenlerin dönüşümü** – X ve Y değişkenlerinin bazı fonksiyonlarla bağlanır. f_X ve f_Y'ye sırasıyla X ve Y'nin dağılım fonksiyonu şöyledir:

$$\boxed{f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|}$$

❒ **Leibniz integral kuralı** – g, x'e ve potansiyel olarak c'nin, c'ye bağlı olabilecek potansiyel c ve a,b sınırlarının bir fonksiyonu olsun. Elde edilen:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial c}\left(\int_a^bg(x)dx\right)=\frac{\partial b}{\partial c}\cdot g(b)-\frac{\partial a}{\partial c}\cdot g(a)+\int_a^b\frac{\partial g}{\partial c}(x)dx}$$

❒ **Chebyshev'in eşitsizliği** – X beklenen değeri μ olan rastgele bir değişken olsun. $k,\sigma>0$ için aşağıdaki eşitsizliği elde edilir:

$$\boxed{P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2}}$$

Ortak Dağılımlı Rastgele Değişkenler

❒ **Koşullu yoğunluk** – Y'ye göre X'in koşullu yoğunluğu, genellikle $f_{X|Y}$ olarak elde edilir:

$$\boxed{f_{X|Y}(x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

❒ **Bağımsızlık** – İki rastgele değişkenin X ve Y olması durumunda bağımsız olduğu söylenir:

$$\boxed{f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)}$$

❒ **Marjinal yoğunluk ve kümülatif dağılım** – f_{XY} ortak yoğunluk olasılık fonksiyonundan:

Olay	Marjinal yoğunluk	Kümülatif fonksiyon
(D)	$\displaystyle f_X(x_i)=\sum_jf_{XY}(x_i,y_j)$	$\displaystyle F_{XY}(x,y)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}f_{XY}(x_i,y_j)$
(C)	$\displaystyle f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dy$	$\displaystyle F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^yf_{XY}(x',y')dx'dy'$

❒ **Kovaryans** – σ_{XY}^2 veya daha genel olarak $\textrm{Cov}(X,Y)$ olarak elde ettiğimiz iki rastgele değişken olan X ve Y'nin kovaryansını aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$\boxed{\textrm{Cov}(X,Y)\triangleq\sigma_{XY}^2=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E[XY]-\mu_X\mu_Y}$$

❒ **Korelasyon** – σ_X,σ_Y, X ve Y'nin standart sapmalarını elde ederek, ρ_{XY} olarak belirtilen rastgele X ve Y değişkenleri arasındaki korelasyonu şu şekilde tanımlarız:

$$\boxed{\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X\sigma_Y}}$$

Not: X,Y'nin herhangi bir rastgele değişkeni için $\rho_{XY}\in[-1,1]$ olduğuna dikkat edin. Eğer X ve Y bağımsızsa, $\rho_{XY}=0$ olur.

❒ **Ana dağıtımlar** – İşte akılda tutulması gereken ana dağıtımlar:

Tür	**Dağılım**	**OYF**	$\psi(\omega)$	$E[X]$	$\textrm{Var}(X)$
(D)	$X\sim\mathcal{B}(n,p)$ Binomial	$P(X=x)=\displaystyle\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$ $x\in[\![0,n]\!]$	$(pe^{i\omega}+q)^n$	np	npq
	$X\sim\textrm{Po}(\mu)$ Poisson	$P(X=x)=\dfrac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$ $x\in\mathbb{N}$	$e^{\mu(e^{i\omega}-1)}$	μ	μ
(C)	$X\sim\mathcal{U}(a,b)$ Tekdüze	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ $x\in[a,b]$	$\dfrac{e^{i\omega b}-e^{i\omega a}}{(b-a)i\omega}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
	$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ Gauss	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x\in\mathbb{R}$	$e^{i\omega\mu-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$	μ	σ^2
	$X\sim\textrm{Exp}(\lambda)$ Üstel	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $x\in\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{1-\frac{i\omega}{\lambda}}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

Parameter estimation

❒ **Rastgele örnek** – Rastgele bir örnek, bağımsız ve aynı şekilde X ile dağıtılan $X_1,...,X_n$ değişkeninin rastgele değişkenidir.

❒ **Tahminci (Kestirimci)** – Tahmin edici, istatistiksel bir modelde bilinmeyen bir parametrenin değerini ortaya çıkarmak için kullanılan verilerin bir fonksiyonudur.

❒ **Önyargı** – Bir tahmin edicinin önyargısı $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$ dağılımının beklenen değeri ile gerçek değer arasındaki fark olarak tanımlanır, yani:

$$\boxed{\textrm{Bias}(\hat{\theta})=E[\hat{\theta}]-\theta}$$

Not: $E[\hat{\theta}]=\theta$ olduğunda bir tahmincinin tarafsız olduğu söylenir.

❒ **Örnek ortalaması** – Rastgele bir numunenin numune ortalaması, dağılımın gerçek ortalamasını to tahmin etmek için kullanılır, genellikle $\overline{X}$ olarak belirtilir ve şöyle tanımlanır:

$$\boxed{\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i}$$

❒ **Örnek varyansı** – Rastgele bir örneğin örnek varyansı, bir dağılımın σ^2 gerçek varyansını tahmin etmek için kullanılır, genellikle s^2 veya $\hat{\sigma}^2$ olarak elde edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boxed{s^2=\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}$$

❒ **Merkezi Limit Teoremi** – Ortalama μ ve varyans σ^2 ile verilen bir dağılımın ardından rastgele bir $X_1,...,X_n$ örneğine sahip olalım.

$$\boxed{\overline{X}\underset{n\rightarrow+\infty}{\sim}\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$