İHSAN TİMUÇİN DOLAPCİ, YİĞİT AKSOY

MÜHENDİSLER İÇİN SAYISAL YÖNTEMLER

PUBLISHER OF THIS BOOK

Copyright © 2013 İHSAN TİMUÇİN DOLAPCİ, YİĞİT AKSOY

PUBLISHED BY PUBLISHER OF THIS BOOK

TUFTE-LATEX.GOOGLECODE.COM

Licensed under the Apache License, Version 2.0 (the "License"); you may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

İçindekiler

Hata Analizi 11

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü 15

Lineer ve Lineer Olmayan Denklem Sistemlerin Çözümü 25

Eğri Uydurma ve İnterpolasyon 33

Sayısal Türev 61

Sayısal İntegrasyon 69

Başlangıç Değer Problemleri 81

Sınır Değer Problemleri 87

Kaynakça 97

Dizin 99

Şekil Listesi

1 Sabit Nokta İterasyonu şekli 17
2 Secant Yöntemi 23

3 Yamuk yöntemi 70
4 Genel Yamuk yöntemi 71
5 Simpson 1/3 Kuralı 72
6 Bileşik 1/3 Simpson yöntemi 74
7 Simpson 3/8 Kuralı 75
8 Bileşik 3/8 Simpson yöntemi 75

9 Euler yöntemi 82
10 Taylor Serisi yöntemi 83

Tablo Listesi

1 Tablo 1 16
2 Tablo 2 17
3 Tablo 3 18
4 Tablo 4 23

5 Tablo 5 35
6 Tablo 6 35
7 Tablo 7 35
8 Tablo 8 35
9 Tablo 9 36
10 Tablo 10 36
11 Tablo 11 37
12 Tablo 12 37
13 Tablo 13 38
14 Tablo 14 38
15 Tablo 15 46
16 Veri Değerleri 46
17 Bölünmüş Fark Tablosu 46
18 $erf(x)$ fonksiyonunun fark tablosu 47
19 Tablo 16 50
20 Tablo 17 50
21 Tablo 18 55
22 Tablo 19 58
23 $erf(x)$ fonksiyonunun fark tablosu 58
24 $K(\alpha)$ fonksiyonunun Fark Tablosu 59

25 $\cos(x)$ değerleri 63
26 $\cos(x)$ değerleri 65
27 $\cos(x)$ değerleri 66

28 Kotes Katsayıları 78

29 Kotes Katsayıları 86

30 Kotes Katsayıları 92

Dedicated to those who appreciate LaTeX

and the work of Edward R. Tufte and Donald E. Knuth.

Hata Analizi

Hata Tanımları

Günümüzde pek çok alanda özellilkle mühendislikte çok sayıda problemin analitik çözümü yapılamaması dolayısıyla sayısal yöntemlerle yaklaşık çözümleri yapılabilmektedir. Bu sayısal çözümlerde hesaplamanın yapıldığı yöntem veya bilgisayarın yaptığı hataların yanında ortaya çıkan başka hatalarda vardır. Bu hatalar gerçek çözümlerle, sonuçları karşılaştırarak yada tahmin ederek tespit edilir. Bu durumda hatanın kabul edilebilir bir seviyede olup olmadığını hata analizi yaparak ortaya çıkartırız. Hata analizi; eğer gerçek değer biliniyorsa gerçek değerden faydalanarak, eğer bilinmiyorsa iterasyonlardan faydalanarak yapılır.

$$\text{Gerçek Değer} = \text{Yaklaşık Değer} + \text{Gerçek Hata}$$

dolayısıyla

$$\text{Gerçek Hata} = \text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer}$$

gerçek hatayı E_t ile gösterelim t indisi gerçek (true) hata olduğunu belirtmek için kullanalım bu durumda

$$E_t = \text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer} \tag{1}$$

olur. Bazen hatanın miktarı değil oranı önemlidir. Bu durumda

$$\text{Gerçek Oransal Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek Hata}}{\text{Gerçek Değer}} = \frac{\text{G.H.}}{\text{G.D.}}$$

Eğer bağıl hatanın yüzdesini bulmak istersek;

$$\text{Gerçek Oransal Bağıl Yüzde Hata} = \varepsilon_t = \frac{\text{Gerçek Hata}}{\text{Gerçek Değer}}.\%100$$

olacaktır

Örnek 0.1 *Bir köprü ve bir perçinin uzunluklarını ölçmekle görevlendirildiğinizi ve bunları sırasıyla* 9999 *cm ve* 9 *cm bulduğunuzu varsayalım. Eğer gerçek değer sırasıyla* $10,000$ *cm ve* 10 *cm ise her iki durum için (a) Gerçek hatayı (b) Gerçek bağıl yüzde hatayı hesaplayınız.*

(a) Köprünün ölçülmesindeki hata

$$E_t = 10,000 - 9999 = 1\ cm$$

ve perçin için

$$E_t = 10 - 9 = 1\ cm$$

(b) Köprü için gerçek bağıl yüzde hata

$$\varepsilon_t = (1/10,000).\%100 = \%0.01$$

ve perçin için

$$\varepsilon_t = (1/10).\%100 = \%10$$

Bu durumda; her iki ölçmedede 1 cm'lik hata olduğu halde perçin için bağıl hata çok daha büyüktür. Bu durumda köprü için iyi bir ölçüm yaptığımız söylenebilir fakat perçin için iyi bir ölçüm yapılmamıştır.

Sayısal yöntemlerde gerçek değerin bilinmesi ancak analitik çözümleri bilinen denklemler için geçerlidir. Buda özel bir yöntemin çözümlerinin geçerliliğini kontrol için uygulanan bir durumda mümkündür. Ancak gerçek uygulamalarda tam çözümleri bilmemiz mümkün değildir. Eğer ele aldığımız problemin gerçek değerleri yok ise hata hesaplamalarında yukarıdaki hata tanımlamalarını kullanamayız. Bu durumda en iyi yapılacak şey hatanın tolere edilebilir miktara indirilmesidir, bunun için aşağıdaki tanımlamayı yapabiliriz.

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Yaklaşık Hata}}{\text{Yaklaşık Değer}} 100\% \tag{2}$$

burada a alt indisi (approximate) yaklaşık hatayı temsil eder. Mühendislik uygulamalarında (1) eşitliği, (3) eşitliğindeki hatanın hesaplanmasında kullanılmaz. Sayısal yöntemlerde zor işlerden biride gerçek değeri hakkında bilgi sahibi olmadan hata tahminleri yapmaktır. Örmeğin, belirli sayısal yöntemlerle çözüm yapmada *iterasyon* kullanılır. Bu gibi durumlarda, mevcut bir yaklaşım bir önceki yaklaşımın temeli üzerinde yapılır. Bu prosedürde ard arda, yada iterafif olarak, gittikçe iyileşen (umuduyla) yaklaşımlar uygulanır. Bu gibi durumlar için, hata genellikle o andaki yalaşık değer ile bir önceki yaklaşık değer arasındaki fark olarak tahmin edilir. Dolayısıyla bağıl yüzde hata aşağıdaki gibi bulunur

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Mevcut yaklaşık değer - Önceki yaklaşık değer}}{\text{Mevcut yaklaşık Değer}} 100\% \tag{3}$$

Hata analizi yapıldığında hatanın pozitif yada negatif çıkması önemli değildir. Daha çok hatanın tolere edilebilecek miktarda olması önemlidir. Tolere edilebilecek yüzde hatayı ε_s ile belirtirsek bulduğumuz değer ε_s den mutlak değerce küçük olmalıdır. Bu durumda aşağıdaki şart sağlanıncaya kadar hesablamaya devam edilir.

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

Bu bağıntı iterasyonda durmamız gereken noktayı belirler, o yüzden *durma kriteri* olarakta kabul ederiz. Eğer bağıntı sağlanırsa, sonucun kabul edilebilir ε_s hata sınırları içinde kaldığı kabul edilir.

Hataları anlamlı basamak sayısıylada ilişkilendirmek yararlı olacaktır. Aşagıdaki kriter gerçekleştiği taktirde sonucun *en az n* anlamlı basamak için kesinlikle doğru olduğu gösterilebilir (Scarborough, 1966).

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\% \tag{4}$$

Örnek 0.2 (İteratif Yöntemler için Hata Tahminleri) *Matematikte fonksiyonlar çoğu zaman sonsuz serilerle gösterilebilir. Örneğin exponansiyel fonksiyon aşağıdaki gibi hesaplanabilir:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{5}$$

Böylece, dizinin içine ne kadar çok terim eklenirse, yaklaşım, e^x'in gerçek değerini o kadar daha iyi tahmin eder. (5) eşitliğine Maclauren Serisi Açılımı denir.

En basit şekilden, yani $e^x = 1$ den başlayarak, tek tek terimler ekleyerek $e^{0.5}$ sayısını tahmin edin. Her bir terimi ekledikten sonra, sırasıyla gerçek ve yaklaşık bağıl yüzde hatayı hesaplayın. Gerçek değerin $e^{0.5} = 1.648721\ldots$ olduğunu kabul edin. Yaklaşık hata tahmini ε_a'nın mutlak değeri, üç anlamlı basamak veren belirli bir ε_s hata kriteinden daha küçük oluncaya kadar terim eklemeye devam edin.

Çözüm 1 *Önce (4) eşitliği kullanılarak, sonucun en az üç anlamlı basamak için doğru olmasını garanti eden hata kriteri belirlenebilir:*

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

Demekki ε_a bu seviyenin altına ininceye kadarseriye term ekleyeceğiz.

İlk tahmin (5) eşitliğinin ilk terimine eşittir. Dolayısıyla ilk tahminimiz 1 rakamına eşittir. İkinci tahmin aşağıdaki gibi ikinci terimin eklenmesiyle elde edilir.

$$e^x = 1 + x$$

ve $x = 0.5$ için,

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 = 1.5$$

bu değer, aşagıdaki gerçek bağıl yüzde hatayı verir.

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1.648721 - 1.5}{1.648721} \right| \times 100\% = 9.02\%$$

(3) eşitliği kullanılarak hatanın yaklaşık bir tahmin aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{1.5 - 1}{1.5} \right| \times 100\% = 33.3\%$$

ε_a, istenen ε_s değerinden küçük olmadığından, hesaplarımıza bir terim daha, $x^2/2!$, ilave ederek ve hataları yeniden bularak devam edeceğiz. İşleme $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ oluncaya kadar devam edilir. Bütün hesaplar aşağıdaki tabloda verilmiştir;

Dolayısıyla 5 terim sonra yaklaşık hata $\varepsilon_s = 0.05\%$ değerinin altına iner ve hesaplama sona erer. Hatta anlamlı basamak sayısı altıncı terimde üçdende daha fazla olduğu görülmektedir. Burada hem gerçek bağıl hata yüzdesinin hemde yaklaşık bağıl hata yüzdesinin paralel değerlere doğru gittiğini söyleyebiliriz buda bizim yaklaşık bağıl yüzde hata tanımının çoğunlukla doğru çıkacağını gösterir, tabii ileri sürülen metodun kullanışlı olmasıda formülün doğru çıkmasını etkiler.

Terimler	Sonuç	$\varepsilon_t\%$	$\varepsilon_a\%$
1	1	39.3	33.3
2	1.5	9.02	7.69
3	1.625	1.44	1.27
4	1.645833333	0.175	0.158
5	1.648437500	0.0172	0.0158
6	1.648697917	0.00142	0.00158

Sayısal yöntemlerde hesaplama yaparken bazı hatala oluşur bu hataları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

Yuvarlama Hataları

π, e, $\sqrt{3}$ gibi irrasyonel sayıların virgülden sonraki terimleri sonsuza gider yada sabit sayıda anlamlı basamak yazılamaz. Bundan dolayı bilgisayarda tam olarak ifade edilemezler. Ayrıca bilgisayarlar 2-tabanlı gösterim kullandıklarından bazı 10-tabanlı sayılarıda hassas olarak ifade edemezler. Anlamlı basamakların bu şekilde ifade edilmesinden dolayı oluşan farka *yuvarlama hatası* denir.

Kesme Hataları

Sayısal yöntemlerde kullanılan seriler, belli bir yerde kesilip geri kalan terimlerinin atılması biçiminde kullanılır. Örneğin;

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

serisinden $e^{0.5}$ değerini elde etmek istediğimizde sonsuz seriyi alamayacağımızdan belli sayıda terim alınıp geri kalnını atmamız gerekir. Sayısal yöntemlerde bu tür hatalara *kesme hatası* denir.

Veri ve Formülasyon Hataları

Bu durumlar matematiksel modellemeyle ilgilidir. Modelin dayandığı fiziksel verilerin belirsizliği nedeniyle analizde bazen hatalar oluşur. Örneğin; düşen bir cisim modelinin denemek için bir cismi defalarca belli bir yükseklikten atarak belirli bir zaman sonra düşme hızını ölçtüğümüzde, bu ölçümlerde mutlaka belirsizlik olacaktır, çünki cismin bazı düşmelerinde diğerlerine göre daha hızlı olacaktır bu gibi durumlara *Veri ve Formülasyon Hataları* denir.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

İkiye Bölme Yöntemi

İkiye bölme kuralı, $f(x)$ fonksiyonu verilen bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve bir köke sahip olduğu biliniyorsa, $f(x) = 0$ formunda bir denklemin yaklaşık kökünü bulmak için bir parantez açma yöntemidir. Böyle bir duruma $f(x)$ fonksiyonu çözüm aralığının uç noktalarında zıt işaretli olacaktır. Yandaki şekillerde görüldüğü gibi, eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ ve $x = b$ noktaları arasında bir çözüme sahipse, ya $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ yada $f(a) > 0$ ve $f(b) < 0$ dür. Başka bir deyişle, eğer $x = a$ ve $x = b$ arasında bir çözüm varsa bu durumda $f(a).f(b) < 0$ dür.

İkiye bölme kuralıyla bir kök bulunmak istenirse önce $x = a$ ve $x = b$ uç noktaları olmak üzere çözümün var olduğu bir aralık tespit edilir. Böyle bir aralık ya $f(x)$ in grafiği çizilir ve x eksenini kestiği yer tespit edilir yada işaretleri zıt olan fonsiyonunun iki değeri tespit edilerek bulunur. Aralığın orta noktası x_{r1} yaklaşık çözümün ilk tahmini olarak alınır. Gerçek çözüm ya a ve x_{r1} noktaları arasındaki aralıkta yada x_{r1} ve b noktaları arasındaki aralıktadır. Eğer yaklaşık çözüm yeterince doğru değil ise doğru çözümü içeren yeni bir aralık tanımlanır. Çözümü içine alan yeni aralık önceki aralığın yarısı kadardır, ve onunda orta noktası yaklaşık çözüm için yeni (ikinci) tahmindir. Bu şekilde iterasyon önceden seçilen bir kritere göre yaklaşık çözüm yeterince doğru oluncaya kadar devam ettirilir.

İkiye bölme yöntemiyle yaklaşık çözüm bulmak için prosedür (yada algoritma) aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Fonksiyonun kökünü içine alan ve $f(a).f(b) < 0$ şartını sağlayan bir $x_a = a$ ve $x_{ü} = b$ noktaları belirlenir.

Adım 2: Fonksiyonun kökünün ilk tahmin x_{r1} aşağıdaki formülden bulunur:

$$x_{r1} = \frac{x_a + x_{ü}}{2}$$

Adım 3: Fonksiyonun kökünü yeni bulunan değere göre hangi alt aralıkta olduğunu bulmak için ašağıdaki hesaplar yapılır;

- $f(a).f(x_{r1}) < 0$ ise kök $[a, x_{r1}]$ arasındadır. O halde yeni kök tahmini yapmak için Adım 2 dönülür.
- $f(x_{r1}).f(b) < 0$ ise kök $[x_{r1}, b]$ arasındadır. O halde yeni kök tahmini yapmak için Adım 2 dönülür.
- $f(a)f(x_{r1}) = 0$ yada $f(b).f(x_{r1}) = 0$ ise kök x_{r1}'e eşittir, hesaplamaya son verilir.

Örnek: $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ denkleminin bir kökünü ikiye bölme yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Öncelikle denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım

$$f(1) = -6 \qquad f(2) = -1 \qquad f(3) = 16$$

bu durumda denklemin kökü $[2,3]$ arasındadır.

$$x_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad f(2.5) = 5.625$$
$$f(2).f(2.5) = -1\,.\,5.625 = -5.625 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2, 2.5]$$
$$x_2 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25 \quad \Rightarrow \quad f(2.25) = 1.89063$$
$$f(2).f(2.25) = -1\,.\,1.89063 = -1.89063 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2, 2.25]$$
$$x_3 = \frac{2+2.25}{2} = 2.125 \quad \Rightarrow \quad f(2.125) = 0.345703$$
$$f(2).f(2.125) = -1\,.\,0.345703 = -0.345703 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2, 2.125]$$
$$x_4 = \frac{2+2.125}{2} = 2.0625 \quad \Rightarrow \quad f(2.0625) = -0.351318$$
$$f(2.0625).f(2.125) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [2.0625, 2.125]$$

denklemin yaklaşık kökü 2.09455 dir. Bu durumda köke yaklaşma bilhayli

Tablo 1: Tablo 1

iterasyon	x_a	$x_{ü}$	x_r	$f(x_r)$	ε_a	ε_t
1	2	3	2.5	5.625	-	-19.3574
2	2	2.5	2.25	1.189063	-11.1111	-7.42164
3	2	2.25	2.125	0.345703	-5.88235	-1.45377
4	2	2.125	2.0625	-0.351318	-3.0303	1.53016
5	2.0625	2.125	2.09375	-0.008942	1.49254	0.0381944
6	2.09375	2.125	2.10938	-0.166893	0.740976	-0.708028
7	2.09375	2.10938	2.10157	0.0786466	-0.371627	-0.335156
8	2.09375	2.10157	2.09766	0.0786466	-0.186398	-0.148481
9	2.09375	2.09766	2.0957	0.0128274	-0.0935248	-0.0549044
10	2.09375	2.0957	2.09473	0.00199272	-0.0463067	-0.00859373

yavaş olmaktadır.

Örnek: $f(x) = x^2 - 3 = 0$ denkleminin bir kökünü ikiye bölme yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım

$$f(-3) = 6 \qquad f(-2) = 1 \qquad f(-1) = -2 \qquad f(0) = -3$$
$$f(3) = 6 \qquad f(2) = 1 \qquad f(1) = -2$$

bu durumda denklemin kökleri $[-2,-1]$ ve $[1,2]$ aralarındadır. Biz sadece $[1,2]$ aralasındaki kökü bulmaya çalışalım

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad f(1.5) = -0.750$$
$$f(1.5).f(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.5, 2]$$
$$x_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \quad \Rightarrow \quad f(1.75) = 0.0625$$
$$f(1.5).f(1.75) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.5, 1.75]$$
$$x_3 = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625 \quad \Rightarrow \quad f(1.625) = -0.359375$$
$$f(1.625).f(1.75) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.625, 1.75]$$
$$x_4 = \frac{1.625+1.75}{2} = 1.6875 \quad \Rightarrow \quad f(1.6875) = -0.152344$$
$$f(1.6875).f(1.75) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kök } x \in [1.6875, 1.75]$$

denklemin yaklaşık kökü 2.09455 dir. Bu durumda köke yaklaşma bilhayli yavaş olmaktadır.

iterasyon	x_a	$x_{ü}$	x_r	$f(x_r)$	ε_a	ε_t
1	1	2	1.5	-0.75	-	-13.3974
2	1.5	2	1.75	0.0625	14.2857	-1.03634
3	1.5	1.75	1.625	-0.359375	-7.69231	6.18054
4	1.625	1.75	1.6875	-0.152344	3.7037	2.5721
5	1.6875	1.75	1.71875	-0.0458984	1.81818	0.767876
6	1.71875	1.75	1.73438	0.00807398	0.901187	-0.134523
7	1.71875	1.73438	1.72657	-0.018956	-0.452342	0.316388
8	1.72657	1.73438	1.73048	-0.00543897	0.225949	0.090644
9	1.73048	1.73438	1.73243	0.0013137	0.112559	-0.0219393
10	1.73048	1.73243	1.73146	-0.00204627	-0.0560221	0.0340637

Tablo 2: Tablo 2

Regula-Falsi (Kiriş) Yöntemi

Sabit Nokta İterasyonu

Sabit nokta[1] iterasyonu $f(x) = 0$ yapısında bir denklemi çözmek için bir yöntemdir. Yöntemde, denklem

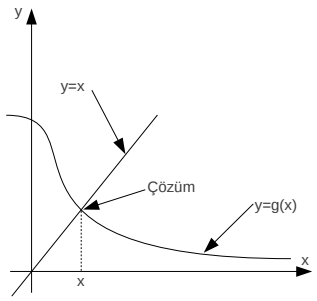
$$x = g(x) \tag{6}$$

biçiminde tekrar yazılarak uygulanır. Burada x i eğer $f(x) = 0$ denkleminin çözümü olarak alırsak bu durumda (11) nın sağ tarafıyla sol tarafı eşit olmalıdır.

[1] Sabit-nokta yöntemi matematiğin biçok alanında kullanılan eski bir yöntemdir, teknik eski olmasına rağmen ilk defa Alman matematikçi L.E.J. Brouwer (1882-1962) tarafından 1900 lerin başlarında kullanılmıştır.

Çözümü $y = x$ ve $y = g(x)$, şekil 1 de gösterildiği gibi, grafiklerinin kesişim noktası olarak alabiliriz. Yaklaşık çözüm bulmak için $x = x_0$ değeri $g(x)$ de yazılarak x_2 değeri bulunur, daha sonra $x = x_2$ değeri $g(x)$ de yazılarak x_3 değeri bulunur bu şekilde iterasyon devam ettirilirse genel $x_{i+1} = g(x_i)$ formülü elde edilir. Yani

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) \\ x_2 &= g(x_1) \\ x_3 &= g(x_2) \\ &\vdots \\ x_{i+1} &= g(x_i) \end{aligned}$$



Şekil 1: Sabit Nokta İterasyonu şekli

iterasyonu ortaya çıkar.

İterasyon $|g'(x)| < 1$ ise yakınsama mutlak olur, yani mutlaka köke doğru yaklaşır. Ancak bu şartın sağlanmadığı durumlardada köke yakınsama olabilir.

Örnek: $x^3 - 2x - 5 = 0$ denklemini göz önüne alalım denklemin yaklaşık kökü 2.09455 olduğundan $x_0 = 1$ den başlayarak kökü bulmaya çalışalım.

Çözüm: Denklem üç faklı yoldan $x = g(x)$ formunda yazılabilir.

Durum a:

$$x = \frac{x^3 + 5}{2}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{x^3+5}{2}$ ve $g'(x) = \frac{3x^2}{2}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = |1.5| > 1$$

Durum b:

$$x = \frac{5}{x^2 - 2}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5}{x^2-2}$ ve $g'(x) = -\frac{10x}{(x^2-2)^2}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = |-10| > 1$$

Durum c:

$$x = \sqrt[3]{2x+5}$$

bu durumda, $g(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ ve $g'(x) = \frac{2}{3(2x+5)^{2/3}}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = |0.182184| < 1$$

Görüldüğü gibi **c** şıkkında seçilen $g(x)$ fonksiyonu çözüm için uygundur, $x_0 = 1$ değeri için mutlak bir yakınsama elde edileceği söylenebilir. Fakat $|g'(x_0)| < 1$ koşulu yeterli bir şart olsada gerekli olmayabilir. Bazen $|g'(x_0)| > 1$ ve $|g'(x_0)| = 1$ koşulu olduğundada iterasyonda çözüme yaklaşılabilir. İterasyon fonksiyonu ile kökü bulmaya çalışalım

$$x_{i+1} = \sqrt[3]{2x_i + 5}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{2 \times 1 + 5} = 1.91293 \\
x_2 &= \sqrt[3]{2 \times 1.91293 + 5} = 2.06658 \\
x_3 &= \sqrt[3]{2 \times 2.06658 + 5} = 2.09029 \\
x_4 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09029 + 5} = 2.09390 \\
x_5 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09390 + 5} = 2.09445 \\
x_6 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09445 + 5} = 2.09454 \\
x_7 &= \sqrt[3]{2 \times 2.09454 + 5} = 2.09455
\end{aligned}$$

iterasyonu kesebiliriz çünki artık x_7, x_8, x_9 ve diğerlerinin ilk beş basamağı aynı çıkacaktır. Çıkan değerler ve ε_t değerleri aşağıdaki tabloda kaşılaştırılmıştır.

i	x_i	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	1	52.267
1	1.91293	8.67107
2	2.06658	1.33537
3	2.09029	0.203385
4	2.09390	0.0310329
5	2.09445	0.0047743
6	2.09454	0.00047743
7	2.09455	0.0

Tablo 3: Tablo 3

Örnek: $xe^{0.5x} + 1.2x - 5 = 0$ denklemi ele alalım. Denklemin yaklaşık çözümü $x = 1.5050$ olduğu için $x_0 = 1$ den başlayarak çözüm bulalım,

Çözüm: Denklem üç faklı yoldan $x = g(x)$ formunda yazılabilir.

Durum a:

$$x = \frac{5 - xe^{0.5x}}{1.2}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5-xe^{0.5x}}{1.2}$ ve $g'(x) = -(e^{0.5x} + 0.5e^{0.5x})/1.2$ dir. $x_0 = 1$ için

$$g'(1) = -(e^{0.5\,.\,1} + 0.5e^{0.5\,.\,1})/1.2 = -2.0609$$

Durum b:

$$x = \frac{5}{e^{0.5x} + 1.2}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5}{e^{0.5x}+1.2}$ ve $g'(x) = \frac{-5e^{0.5x}}{2(e^{0.5x}+1.2)^2}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$g'(1) = \frac{-5e^{0.5\,.\,1}}{2\left(e^{0.5\,.\,1} + 1.2\right)^2} = -0.5079$$

Durum c:

$$x = \frac{5 - 1.2x}{e^{0.5x}}$$

bu durumda, $g(x) = \frac{5-1.2x}{e^{0.5x}}$ ve $g'(x) = \frac{-3.7+0.6x}{e^{0.5x}}$ dir. $x_0 = 1$ için

$$g'(1) = \frac{-3.7 + 0.6\,.\,1}{e^{0.5\,.\,1}} = -1.8802$$

Görüldüğü gibi **b** şıkkında seçilen $g(x)$ fonksiyonu çözüm için uygundur, $x_0 = 1$ değeri için mutlak bir yakınsama elde edileceği söylenebilir.

$$x_{i+1} = \frac{5}{e^{0.5x_i} + 1.2}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{e^{0.5\,.\,1} + 1.2} = 1.7552 & x_2 &= \frac{5}{e^{0.5\,.\,1.7552} + 1.2} = 1.3869 \\
x_3 &= \frac{5}{e^{0.5\,.\,1.3869} + 1.2} = 1.5622 & x_4 &= \frac{5}{e^{0.5\,.\,1.5622} + 1.2} = 1.4776 \\
x_5 &= \frac{5}{e^{0.5\,.\,1.4776} + 1.2} = 1.5182 & x_6 &= \frac{5}{e^{0.5\,.\,1.5182} + 1.2} = 1.4986
\end{aligned}$$

Beklenildiği gibi, iterasyonda bulunan değerler gerçek çözüm $x = 1.5050$ değerine doğru yakınsamaktadır.

Buna karşılık, eğer durum **a** daki $g(x)$ fonksiyonunu itarasyonda kullanırsak çıkan değerler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5 - 1\,.\,e^{0.5\,.\,1}}{1.2} = 2.7927 & x_2 &= \frac{5 - 2.7927\,.\,e^{0.5\,.\,2.7927}}{1.2} = -5.2364 \\
x_3 &= \frac{5 - (-5.2364)\,.\,e^{0.5\,.\,(-5.2364)}}{1.2} = 4.4849 \\
x_4 &= \frac{5 - 4.4849)\,.\,e^{0.5\,.\,4..4889}}{1.2} = -31.0262
\end{aligned}$$

çıkar, bu durumda iterasyonlar gerçek çözümden uzaklaşmaktadır.

Newton-Raphson Yöntemi

Newton[2]'un (yada Newton-Raphson[3]) metodu bir kök bulma probleminin çözümü için sayısal yöntemlerde en çok bilinen ve en kuvvetli yöntemdir. Newton yöntemini tanıtmak için aşağıdaki iki yolu verelim.

Eğer x_i gerçek kök ise $f(x_i) = 0$ dır. Eğriye $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen teğetin eğimi,

$$f'(x) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \Rightarrow \quad x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

düzenlersek

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{7}$$

bulunur aynı işlemleri diğer x değerlerinede yapıp işlemleri genellersek;

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\
&\vdots \\
x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı formülü Taylor serisindende elde edebiliriz. Taylor serisini x_i civarında açarsak

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i) + (x_{i+1} - x_i)^2 f''(x_i) + \cdots$$

[2] Isaac Newton (1641-1727) tüm zamanların en çok tanınan, bir çiftçi ailesinin çocuğu olan, kıymeti ve yaptıkları sağlığında bilinen, maddi sıkıntı çekmede yaşayabilen ender bilim insanınlarındandır. Fen ve Matematiğin bir çok alanında çalışmaları vardır. O, metodunu 1671 yılında $x^3 - 2x - 5 = 0$ polinomunun bir kökünü bulmak için kullanmıştır. Herne kadar polinomun kökünü bulmak için metodu kullansada, metod daha geniş alanlarda fonksiyonarın kökünü bulmak içinde rahatlıkla kullanılabilmektedir.

[3] Joseph Raphson (1648-1715) 1690 yılında Isac Newtona atfedilen metodun bir tarifini ondan bağımsız olarak vermiştir. Ne Newton nede Raphson herikiside yanlızca polinomları düşündükleri için metodun tanıtımında türevi açıkca kullanmamışlardır. Diğer matematikçiler de özellikle James Gregory (1636-1675) bu yöntemin farkındaydı.

formülü gerçekleşmektedir. Burada x_{i+1} in gerçek köke çok yakın olduğunu varsayılırsa $f(x_{i+1}) \approx 0$ alınır, $(x_{i+1} - x_i)^2$ ve sonraki terimlerine ihmal edebiliriz. Bu durumda taylor serisinden;

$$0 = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i)$$

ve buradan;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{8}$$

elde edilir.

Örnek: $f(x) = e^x - 3x$ denkleminin kökünü $x_0 = 0$ için

(a) Sabit-nokta iterasyonuyla

(b) Newton-Raphson yöntemiyle

bulunuz.

Çözüm:

(a) Denklemi $x = g(x)$ formunda yazılım.

$$e^x - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}e^x$$

$x_0 = 0$ dır.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3} & x_2 &= \frac{e^{1/3}}{3} = 0.465 \\ x_3 &= \frac{e^{0.465}}{3} = 0.530 & x_4 &= \frac{e^{0.530}}{3} = 0.567 \\ x_5 &= \frac{e^{0.567}}{3} = 0.587 & x_6 &= \frac{e^{0.587}}{3} = 0.5995 \\ x_7 &= \frac{e^{0.5995}}{3} = 0.607 & x_8 &= \frac{e^{0.607}}{3} = 0.612 \\ x_9 &= \frac{e^{0.612}}{3} = 0.615 \end{aligned}$$

(b) Newton-Raphson ile;

$$f(x) = e^x - 3x \quad \Rightarrow \quad x = e^x - 3$$

başlangıç noktası $x_0 = 0$ dır.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{e^0 - 0}{e^0 - 3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 &= 0.5 - \frac{e^{0.5} - 3.(0.5)}{e^{0.5} - 3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.6100596 \\ x_3 &= 0.6100596 - \frac{e^{0.6100596} - 3.(0.6100596)}{e^{0.6100596} - 3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.618966 \\ x_4 &= 0.618966 - \frac{e^{0.618966} - 3.(0.618966)}{e^{0.618966} - 3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.619061 \end{aligned}$$

yaklaşık hata;

$$E_a = |x_4 - x_3| = |0.619061 - 0.618966| = 0.000095$$

Bağıl yaklaşık yüzde hata;

$$\varepsilon_a = \frac{M.D - Ö.D}{M.D} \times 100\% = \frac{0.619061 - 0.618966}{0.619061} \times 100\% = \%0.015$$

görüldüğü gibi Newton-Raphson yöntemi çok daha hızlı yaklaşım sağlamaktadır.

Newton-Raphson Yöntemi için Yakınsama Koşulu

Sabit-nokta iterasyonu için yakınsama kuralı $|g'(x)| < 1$ idi bu kural newton-raphson yöntemindede geçerlidir

$$\left|\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)'\right| = \left|\frac{f(x_0).f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| < 1 \tag{9}$$

olmalıdır. Önceki örnekteki yakısama durumuna bakalım

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - 3x \\ f'(x) &= e^x - 3 \\ f''(x) &= e^x \end{aligned}$$

$x_0 = 0$ için

$$\left|\frac{f(0).f''(0)}{(f'(0))^2}\right| = \left|\frac{1.1}{(-2)^2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

yakınsama vardır. $x_0 = 2$ için

$$\left|\frac{f(2).f''(2)}{(f'(2))^2}\right| = \left|\frac{10.29}{19.29}\right| < 1$$

yakınsama vardır. Denklemin kökleri yaklaşık olarak $x_1 = 0.619061$, $x_2 = 1.51213$ dır. Buna göre $x_0 = 2$ için denklemin di?er kökünü bulalım

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 - \frac{e^2 - 6}{e^2 - 3} = 1.683518 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1.683518 - \frac{e^{1.683518} - 6}{e^{1.683518} - 3} = 1.543481 \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1.5335 \\ x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \quad \Rightarrow \quad x_4 = 1.51213 \\ x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \quad \Rightarrow \quad x_5 = 1.51213 \end{aligned}$$

başlangıç değeri $x_0 = 5$ alınsa idi yakınsama olup olmayacağına bakalım;

$$\begin{aligned} f(5) &= e^5 - 15 = 133.41 \\ f'(5) &= e^5 - 3 = 145.41 \\ f''(5) &= e^5 = 148.41 \end{aligned}$$

$$\left|\frac{f(5).f''(5)}{(f'(5))^2}\right| = \left|\frac{(133.41)(148.41)}{(143.41)^2}\right| = \left|\frac{19799.38}{20567.33}\right| < 1$$

yakınsama vardır ama kökten çok uzakta başlamış oluruz.

Newton-Raphson Yöntemindeki Tuzaklar

Newton-Raphson yöntemi yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi çoğu zaman etkili ve hızlı yaklaşım sağlamasına ragmen bazı durumlarda zayıf ve etkisis kalmaktadır. Bu durum yakınsama kriterindeki ifadelerin yani $f(x)$ fonksiyonun birinci ve ikinci türevi ve fonksiyonun değeriyle ilgilidir.

(i) Kök civarında dönüm noktası olması durumunda ($f''(x) = 0$) kökten gittikçe uzaklaşma göstermektedir.

(ii) Başlangıç noktasını yerel maksimum veya minimumlar civarında seçersek diğer iterasyon değerleri salınma eğilimi göstererek köke yaklaşmayacaktır, hatta bu salınma devam edebilir veya egim ($f'(x)$) sıfır yada sıfıra yakın bir değer çıkabilir bu durumdada çözüm ya çıkmayacak yada ilgilendiğimiz aralığın çok dışında bir yere gidecektir.

(iii) Kökten çok uzakta bir yerden başlangıç noktası seçersekde yukarıdaki sebeplerdende dolayı köke sağlıklı bir şekilde yaklaşım olmayacaktır.

• Şimdi bir A sayısının n ci kuvvetten kök değerini bulmaya çalışalım. Bunun için

$$x = \sqrt[n]{A} \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^n - A$$

şeklinde yazılır

$$f(x) = x^n - A \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^n - A}{n\,.\,x_i^{n-1}}$$

payda eşitlenip düzenlenirse

$$x_{i+1} = \frac{(n-1)x_i^n + A}{n\,.\,x_i^{n-1}}$$

Karakök için $n = 2$ almalıyız.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - A}{2\,.\,x_i} = \frac{x_i + A}{2\,.\,x_i}$$

Küpkök için $n = 3$ almalıyız.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - A}{3\,.\,x_i^2} = \frac{2x_i^3 + A}{3\,.\,x_i^2}$$

Örnek1: Newton-Raphson yöntemiyle $\sqrt{3}$ ün değerini hesaplıyalım. için yatay tablo türetiniz.

Çözüm: Karakök için $n = 2$ almalıyız. Bu durumda

$$f(x) = x^2 - 3, \qquad f'(x) = 2x$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + 3}{2\,.\,x_i}$$

$x_0 = 1$ için

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1^2 + 3}{2\,.\,1} = 2 \\
x_2 &= \frac{2^2 + 3}{2\,.\,2} = 7/4 = 1.75 \\
x_3 &= \frac{(1.75)^2 + 3)}{2\,.\,1.75} = 1.73214 \\
x_4 &= \frac{(1.73214)^2 + 3)}{2\,.\,1.73214} = 1.73204
\end{aligned}$$

$\sqrt{3}$ ün gerçek değeri 1.73205 olduğundan yakınsama oldukça iyidir.

Secant Yöntemi

Newton-Raphson yöntemi hızlı yakınsama sağlayan iyi bir yöntemdir, fakat onun zayıf noktası $f(x)$ fonksiyonun türevinin gerekli olmasıdır. Polinomlar ve birçok değişik fonksiyonun türevini almakta sorun yoktur fakat bazen karmaşık fonksiyonların türevini almak zor olabilmektedir. Türev almada sorun yaşayabileceğimiz durumlarda Secant[4] yöntemi kullanılarak çözüm

[4] Secant kelimesi latince kesme manasına gelen *secan* kelimesinden türetilmiştir. Secant yöntemi bir köke yaklaşmak için kesme doğrusu kullanır, bu doğru eğri üzerindeki iki noktayı birleştirerek eğriyi kesen bir doğrudur.

üretilebilir. Secant yöntemi Newton-Raphson yöntemine benzer bir yöntemdir fakat türevli ifade bu yöntemde kullanılmaz.

Secant doğrusunun eğimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2}$$

burada x_2 yanlız bırakılırsa

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)\,(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}$$

x_2 noktasının bulunuşu gibi $x_3,\ x_4,\ \cdots$ bulunur. Denklemi genellersek x_{i+1} noktasını bulmak için x_i ve x_{i-1} noktalarını bilmemiz gerekir ve bu durumda denklemin genel hali:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)\,(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)} \tag{10}$$

bulunur.

Aynı formülü Newton-Raphson yöntemindeki formüldende bulabiliriz.

$$f'(x_i)\cong\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}$$

bu eşitlik newtonun formülünde yerine yazılırsa

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=x_i-\frac{f(x_i)}{\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}}$$

yada düzenlersek

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)\,(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)}$$

formülü bulunabilir.

Örnek: $f(x)=e^{-x}-x$ denkleminin kökünü $x_0=0,\ x_1=1$ için Secant yöntemiyle bulunuz. (Denklemin kökü $x=0.567143$ dur.)

Çözüm:

$x_0=0,\ x_1=1$

Birinci İterasyon:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \quad\Rightarrow\quad f(x_0)=1.0000\\ x_1 &= 1 \quad\Rightarrow\quad f(x_1)=-0.63212 \end{aligned}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)\,(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}=1-\frac{-0.63212\,.\,(0-1)}{1-(-0.63212)}=0.61270$$

$\varepsilon_t=\%8.0$ çıkar.

İkinci İterasyon:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \quad\Rightarrow\quad f(x_1)=-0.63212\\ x_2 &= 0.61270 \quad\Rightarrow\quad f(x_2)=-0.07081 \end{aligned}$$

dikkat edilirse her iki değerde kökün aynı tarafındadır.

$$x_3=0.61270-\frac{-0.07081\,.\,(1-0.61270)}{(-0.63212)-(-0.07081)}=0.56384$$

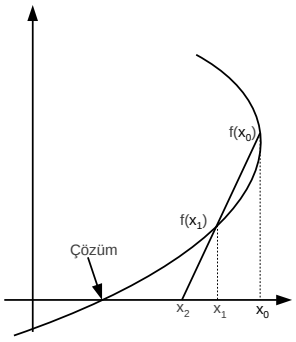
$\varepsilon_t=\%0.58$ çıkar.

Üçüncü İterasyon:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.61270 \quad\Rightarrow\quad f(x_2)=-0.07081\\ x_3 &= 0.56384 \quad\Rightarrow\quad f(x_2)=0.00518 \end{aligned}$$

$$x_4=0.56384-\frac{0.00518\,.\,(0.61270-0.56384)}{(-0.07081)-(-0.00518)}=0.56717$$

$\varepsilon_t=\%0.00048$ çıkar.



Şekil 2: Secant Yöntemi

i	x_i (N-R)	$\lvert\varepsilon_t\rvert$
0	0	100
1	0.5	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

Tablo 4: Tablo 4

Lineer ve Lineer Olmayan Denklem Sistemlerin Çözümü

Giriş

Bu bölümde n bilinmeyenli n lineer eşzamanlı cebirsel denklemlerin çözümü sunacağız. Doğrusal denklem sistemlerinin birçok mühendislik ve fenbilimleri problemleri yanı sıra, sosyal bilimler, iş ve ekonomi problemlernin matematik uygulamaları ile ilişkilidir.

Cebirsel denklemlerin bir sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{11}$$

formunda ele alaım. Burada a_{ij} katsayıları ve b_j sabitleri bilinenler ve x_i bilinmiyenleri temsil eder. Matris notasyonunda, denklemleri

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ya da

$$AX = B$$

biçiminde yazabiliriz. Lineer Cebir ve Matematik derslerinde denklem sistemlerinin doğrudan çözüm yöntemleri verildi. Bu dersde n bilinmiyenli n tane denklemin çözüm vektörünü dolaylı yoldan, yaklaşık olarak bulabilmek için yöntemler vereceğiz. Vereceğimiz yöntemler şunlardır.

1. Jacobi İterasyon Yöntemi
2. Gauss-Seidel Yöntemi
3. S.O.R (Successive over Relaxation) Yöntemi

Jacobi İterasyon Yöntemi

Lineer denklem sistemlerinin çözümünde denklem sistemi oldukça büyük ise Matris işlemleri kullanılarak yok etme metodlarının kullanılması yapılan temel aritmetik işlemlerim çokluğundan dolayı tercih edilmezler. Bu durumda iterasyon yöntemleri tercih edilir. Yöntemde çözümlere bir başlangıç tahmininde bulunulur ve denklemlerde yerine konularak yeni tahmin dğerleri bulunur. ışlemler bir birini takip eden yaklaşık değerler arasında mutlak fark çok küçük oluncaya kadar devam eder.

Bu yöntem aynı zamanda eş zamanlı olarak yer değiştirme yöntemi olarak bilinir. Basit ve anlaşılabilir olması açısından denklem (11) de $n = 3$

alalım, yani üç bilinmiyenli üç denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

olsun. Burada, a_{11}, a_{22} ve a_{33} katsayıları ilgili denklemlerin en büyük katsayıları olduğunu varsayıyoruz, bu varsayım yöntemin çözülebilirlik yada yakınsama şartıdır. Yani;

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}| \end{aligned} \tag{12}$$

Jacobi iterasyon yöntemi, denklem (12)'de verilen koşullar yerine getirildiği durumunda geçerlidir.

Bu denklem sistemini

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)}\right) \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(n)} - a_{23}x_3^{(n)}\right) \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(n)} - a_{32}x_2^{(n)}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada üstel (n) gösterimi n. ci iterasyondaki değerini belirtmektedir. Üstün (0) olması durumu x_i lerin başlangıç değerini ifade etmektedir.

Yukarıdaki iterasyon şemasını $(N \times N)$ lik bir sisteme genelleştirirsek formül:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}x_j^{(n)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(n)}\right)\right\}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{13}$$

ile verilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} 15x + 3y - 2z &= 85 \\ 2x + 10y + z &= 51 \\ x - 2y + 8z &= 5 \end{aligned}$$

sistemini Jocobi iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$\begin{aligned} |15| &> |3| + |-2| \\ |10| &> |2| + |1| \\ |8| &> |1| + |-2| \end{aligned}$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. şimdi jakobi yöntemini uygulayalım:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3y^{(n)} + 2z^{(n)}\right) \\ y^{(n+1)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2x^{(n)} - z^{(n)}\right) \\ z^{(n+1)} &= \frac{1}{8}\left(5 - x^{(n)} + 2y^{(n)}\right) \end{aligned}$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)} = 0,\ y^{(0)} = 0,\ z^{(0)} = 0$ olsun.

1. İterasyon:

$$x^{(1)} = \frac{85}{15} = \frac{17}{3}$$
$$y^{(1)} = \frac{51}{10}$$
$$z^{(1)} = \frac{5}{8}$$

2. İterasyon:

$$x^{(2)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times \frac{51}{10} + 2 \times \frac{5}{8}\right) = 4.73$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times \frac{17}{3} - \frac{5}{8}\right) = 3.904$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{8}\left(5 - \frac{17}{3} + 2 \times \frac{51}{10}\right) = 1.192$$

3. İterasyon:

$$x^{(3)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 3.904 + 2 \times 1.192\right) = 5.045$$
$$y^{(3)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 4.73 - 1.192\right) = 4.035$$
$$z^{(3)} = \frac{1}{8}\left(5 - 4.73 + 2 \times 3.904\right) = 1.010$$

4. İterasyon:

$$x^{(4)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 4.035 + 2 \times 1.010\right) = 4.994$$
$$y^{(4)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 5.045 - 1.010\right) = 3.99$$
$$z^{(4)} = \frac{1}{8}\left(5 - 5.045 + 2 \times 4.035\right) = 1.003$$

5. İterasyon:

$$x^{(5)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 3.99 + 2 \times 1.003\right) = 5.002$$
$$y^{(5)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 4.994 - 1.003\right) = 4.001$$
$$z^{(5)} = \frac{1}{8}\left(5 - 4.994 + 2 \times 3.99\right) = 0.998$$

6. İterasyon:

$$x^{(6)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 4.001 + 2 \times 0.998\right) = 5.0$$
$$y^{(6)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 5.002 - 0.998\right) = 4.0$$
$$z^{(6)} = \frac{1}{8}\left(5 - 5.002 + 2 \times 4.001\right) = 1.0$$

7. İterasyon:

$$x^{(7)} = \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 4.0 + 2 \times 1.0\right) = 5.0$$
$$y^{(7)} = \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 5.0 - 1.0\right) = 4.0$$
$$z^{(7)} = \frac{1}{8}\left(5 - 5.0 + 2 \times 4.0\right) = 1.0$$

Örnek:

$$3x + y - z = 2$$
$$x + 4y + z = 12$$
$$2x + y + 2z = 10$$

sistemini $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ başlangıç değerleriyle, Jocobi iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$\begin{aligned}
|3| &> |1| + |-1| \\
|4| &> |1| + |1| \\
|2| &< |2| + |1|
\end{aligned}$$

şartlar iki denklem için sağlamakta fakat son denklem için sağlamamaktadır buda çözümü yavaşlatacak ama çözüme engel olmayacaktır. Fakat denklemlerin çoğunda bu durum olsaydı o zaman muhtemelen yakınsama olmayacaktı. şimdi jakobi yöntemini uygulayalım:

$$\begin{aligned}
x^{(n+1)} &= \frac{1}{3}\left(2 - y^{(n)} + z^{(n)}\right) \\
y^{(n+1)} &= \frac{1}{4}\left(12 - x^{(n)} - z^{(n)}\right) \\
z^{(n+1)} &= \frac{1}{2}\left(10 - 2x^{(n)} - y^{(n)}\right)
\end{aligned}$$

başlangıç şartı $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ dir.

1. İterasyon:

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{1}{3}(2 - 1 + 1) = 0.666667 \\
y^{(1)} &= \frac{1}{4}(12 - 1 - 1) = 2.5 \\
z^{(1)} &= \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1 - 1) = 3.5
\end{aligned}$$

2. İterasyon:

$$\begin{aligned}
x^{(2)} &= \frac{1}{3}(2 - 2.58333 + 3.04167) = 1.0 \\
y^{(2)} &= \frac{1}{4}(12 - 0.666667 - 3.04167) = 1.95833 \\
z^{(2)} &= \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.666667 - 2.58333) = 3.08333
\end{aligned}$$

3. İterasyon:

$$\begin{aligned}
x^{(3)} &= \frac{1}{3}(2 - 2.03472 + 3.16319) = 1.04167 \\
y^{(3)} &= \frac{1}{4}(12 - 0.819447 - 3.16319) = 1.97917 \\
z^{(3)} &= \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.819447 - 2.03472) = 3.02084
\end{aligned}$$

4. İterasyon:

$$\begin{aligned}
x^{(4)} &= \frac{1}{3}(2 - 1.9485 + 2.98293) = 1.01389 \\
y^{(4)} &= \frac{1}{4}(12 - 1.04282 - 2.98293) = 1.98437 \\
z^{(4)} &= \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1.04282 - 1.9485) = 2.96875
\end{aligned}$$

5. İterasyon:

$$\begin{aligned}
x^{(5)} &= \frac{1}{3}(2 - 2.0014 + 2.98782) = 0.994793 \\
y^{(5)} &= \frac{1}{4}(12 - 1.01148 - 2.98782) = 2.00434 \\
z^{(5)} &= \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1.01148 - 2.0014) = 2.99393
\end{aligned}$$

6. İterasyon:

$$x^{(6)} = \frac{1}{3}\left(2 - 2.00418 + 3.00244\right) = 0.99653$$
$$y^{(6)} = \frac{1}{4}\left(12 - 0.995473 - 3.00244\right) = 2.00282$$
$$z^{(6)} = \frac{1}{2}\left(10 - 2 \times 0.995473 - 2.00418\right) = 3.00304$$

12. İterasyon:

$$x^{(12)} = 1.00001$$
$$y^{(12)} = 2.0$$
$$z^{(12)} = 3.00002$$

Gauss-Seidel Yöntemi

Bu yöntem Jacobi iterasyon yöntemiyle hemen hemen aynıdır. Aralarındaki fark $(n+1)$.nci değeri bulunan bilinmiyenler hemen kullanılır. Yani;

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)}\right) \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(n+1)} - a_{23}x_3^{(n)}\right) \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(n+1)} - a_{32}x_2^{(n+1)}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

yukarıdada görüldüğü gibi ikinci denklemde x_1 yerine birinci denklemden hesaplanan $x_1^{(n+1)}$ değeri kullanılmıştır, üçüncü denklemde birinci ve ikinci denklemlerde hesaplana $x_1^{(n+1)}$ ve $x_2^{(n+1)}$ değerleri kullanılmıştır.

Burada da, a_{11}, a_{22} ve a_{33} katsayılarını, Jacobi iterasyon yönteminde olduğu gibi ilgili denklemlerin en büyük katsayıları olduğunu varsayıyoruz, bu varsayım yöntemin çözülebilirlik yada yakınsama şartıdır. Yani;

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}| \end{aligned} \tag{15}$$

denklem (14) deki iterasyon, (15)'de verilen koşullar yerine getirildiği durumunda geçerlidir.

Gauss-Seidel iterasyon yönteminin $N \times N$ lik bir sistem ve x_i bilinmiyenleri için iterasyon formülü:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{(n)}\right)\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{16}$$

ile verilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} 15x + 3y - 2z &= 85 \\ 2x + 10y + z &= 51 \\ x - 2y + 8z &= 5 \end{aligned}$$

sistemini Jocobi iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$\begin{aligned} |15| &> |3| + |-2| \\ |10| &> |2| + |1| \\ |8| &> |1| + |-2| \end{aligned}$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. şimdi jakobi yöntemini uygulayalım:

$$
\begin{aligned}
x^{(n+1)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3y^{(n)} + 2z^{(n)}\right) \\
y^{(n+1)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2x^{(n+1)} - z^{(n)}\right) \\
z^{(n+1)} &= \frac{1}{8}\left(5 - x^{(n+1)} + 2y^{(n+1)}\right)
\end{aligned}
$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)} = 0,\ y^{(0)} = 0,\ z^{(0)} = 0$ olsun.

1. İterasyon:

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{85}{15} = 5.66667 \\
y^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 5.66667 - 0\right) = 3.96667 \\
z^{(1)} &= \frac{1}{8}\left(5 - 5.66667 + 2 \times 3.96667\right) = 0.908333
\end{aligned}
$$

2. İterasyon:

$$
\begin{aligned}
x^{(2)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 3.96667 + 2 \times 0.908333\right) = 4.99838 \\
y^{(2)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 4.99838 - 0.908333\right) = 4.01028 \\
z^{(2)} &= \frac{1}{8}\left(5 - 4.99838 + 2 \times 4.0\right) = 1.00326
\end{aligned}
$$

3. İterasyon:

$$
\begin{aligned}
x^{(3)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 4.01028 + 2 \times 1.00326\right) = 4.99838 \\
y^{(3)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 4.99838 - 1.00326\right) = 4.0 \\
z^{(3)} &= \frac{1}{8}\left(5 - 4.99838 + 2 \times 4.0\right) = 1.0002
\end{aligned}
$$

4. İterasyon:

$$
\begin{aligned}
x^{(4)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 4.0 + 2 \times 1.0002\right) = 5.00003 \\
y^{(4)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 5.045 - 1.010\right) = 3.99997 \\
z^{(4)} &= \frac{1}{8}\left(5 - 5.045 + 2 \times 4.035\right) = 0.99999
\end{aligned}
$$

5. İterasyon:

$$
\begin{aligned}
x^{(5)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 3.99997 + 2 \times 0.99999\right) = 5.0 \\
y^{(5)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 5.0 - 0.99999\right) = 4.0 \\
z^{(5)} &= \frac{1}{8}\left(5 - 5.0 + 2 \times 4.0\right) = 0.999999
\end{aligned}
$$

6. İterasyon:

$$
\begin{aligned}
x^{(6)} &= \frac{1}{15}\left(85 - 3 \times 4.0 + 2 \times 0.999999\right) = 5.0 \\
y^{(6)} &= \frac{1}{10}\left(51 - 2 \times 5.00 - 0.999999\right) = 4.0 \\
z^{(6)} &= \frac{1}{8}\left(5 - 5.00 + 2 \times 4.0\right) = 1.0
\end{aligned}
$$

7. İterasyon:

$$x^{(7)} = \frac{1}{15}(85 - 3 \times 4.0 + 2 \times 1.0) = 5.0$$
$$y^{(7)} = \frac{1}{10}(51 - 2 \times 5.0 - 1.0) = 4.0$$
$$z^{(7)} = \frac{1}{8}(5 - 5.0 + 2 \times 4.0) = 1.0$$

Örnek:

$$3x + y - z = 2$$
$$x + 4y + z = 12$$
$$2x + y + 2z = 10$$

sistemini $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ başlangıç değerleriyle, Jocobi iterasyon yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$|3| > |1| + |-1|$$
$$|4| > |1| + |1|$$
$$|2| < |2| + |1|$$

şartlar iki denklem için sağlamakta fakat son denklem için sağlamamaktadır buda çözümü yavaşlatacak ama çözüme engel olmayacaktır. Fakat denklemlerin çoğunda bu durum olsaydı o zaman muhtemelen yakınsama olmayacaktı. şimdi jakobi yöntemini uygulayalım:

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{3}\left(2 - y^{(n)} + z^{(n)}\right)$$
$$y^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(12 - x^{(n)} - z^{(n)}\right)$$
$$z^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(10 - 2x^{(n)} - y^{(n)}\right)$$

başlangıç şartı $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ dir.

1. İterasyon:

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}(2 - 1 + 1) = 0.666667$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{4}(12 - 1 - 1) = 2.58333$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 1 - 1) = 3.04167$$

2. İterasyon:

$$x^{(2)} = \frac{1}{3}(2 - 2.58333 + 3.04167) = 0.819447$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{4}(12 - 0.666667 - 3.04167) = 2.03472$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.666667 - 2.58333) = 3.16319$$

3. İterasyon:

$$x^{(3)} = \frac{1}{3}(2 - 2.03472 + 3.16319) = 1.04282$$
$$y^{(3)} = \frac{1}{4}(12 - 0.819447 - 3.16319) = 1.9485$$
$$z^{(3)} = \frac{1}{2}(10 - 2 \times 0.819447 - 2.03472) = 2.98293$$

4. İterasyon:

$$x^{(4)} = \frac{1}{3}\left(2 - 1.9485 + 2.98293\right) = 1.01148$$
$$y^{(4)} = \frac{1}{4}\left(12 - 1.04282 - 2.98293\right) = 2.0014$$
$$z^{(4)} = \frac{1}{2}\left(10 - 2 \times 1.04282 - 1.9485\right) = 2.98782$$

5. İterasyon:

$$x^{(5)} = \frac{1}{3}\left(2 - 2.0014 + 2.98782\right) = 0.995473$$
$$y^{(5)} = \frac{1}{4}\left(12 - 1.01148 - 2.98782\right) = 2.00418$$
$$z^{(5)} = \frac{1}{2}\left(10 - 2 \times 1.01148 - 2.0014\right) = 3.00244$$

6. İterasyon:

$$x^{(6)} = \frac{1}{3}\left(2 - 2.00418 + 3.00244\right) = 0.99942$$
$$y^{(6)} = \frac{1}{4}\left(12 - 0.995473 - 3.00244\right) = 1.99953$$
$$z^{(6)} = \frac{1}{2}\left(10 - 2 \times 0.995473 - 2.00418\right) = 3.00081$$

11. İterasyon:

$$x^{(11)} = 1.0$$
$$y^{(11)} = 2.0$$
$$z^{(11)} = 3.0$$

Eğri Uydurma ve İnterpolasyon

En Küçük Kareler Yöntemi

Fen ve Mühendislikte deneysel çalışmalardan elde edilen veriler grafik üzerinde gösterildiğinde, bu grafiklere en uygun eğrinin bulunması önemli bir konudur. Örneğin; Alman Astronom Johnnes Kepler Gezegenlerin hareketini (üçüncü kanun) $T = Cx^{3/2}$ olarak formüle etmiştir, burada x gezegenlerin güneşe uzaklığını (milyon kilometre olarak), T gezegenlerin bir yılının periyodunu ve C de katsayı sabiti olarak almıştır. Bu durumu ilk dört gezegen için (x, T) çifti olarak incelemiştir. Merkür, Venüs, Dünya ve Mars için çiftler $(58, 88)$, $(108, 225)$, $(150, 365)$ ve $(228, 687)$ alınmış ve C katsayı sabitini $C = 0.199769$ olarak elde etmiştir. Böylece eğri denklemini $T = 0.199769x^{3/2}$ olarak bulmuştur.

Verilere en uygun eğriler genelde ya polinom yapısında

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x \\ y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \end{aligned}$$

yada

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a_0 + a_1 x} \\ y &= bx^a \\ y &= ba^x \end{aligned}$$

şeklinde eğriler olmaktadır.

Deneyden elde edilen veriler arasındaki ilişkiyi en iyi temsil eden eğrinin tipi yukarıdakiler gibi belirlendikten sonra elimizde elde ettiğimiz deneysel veri değerleri ile belirlediğimiz eğrinin grafik üzerindeki değerlerinin farkı en az olmalıdır. Bunun için deneysel verilerden elde edilen noktalar arasından geçecek doğru yada eğrinin bu noktalara olan uzaklıkları toplamı minimum olmalıdır. O halde doğru yada eğri denklemindeki a_0, a_1 ve a_2 gibi katsayıların bu şarta uygun olarak hesaplanma şartı vardır. Söz konusu katsayılar en küçük kareler yöntemiyle hesaplandığı takdirde bu noktaların doğruya veya eğriye uzaklıkların kareleri toplamı minimum tutulmuş olur.

şimdi konuyu biraz daha matematiksel olarak ifade edelim. Belli bir x değeri için iki farklı ordinat değeri var olacaktır. Bunlardan birincisi noktanın deneyde elde ettiğimiz gerçek ordinat değeri, ikincisi bu noktanın doğru yada eğri üzerinde bizim bulmak istediğimiz teorik değeridir. En küçük kareler yöntemi gerçek ve teorik ordinat değerleri arasındaki farkın kareleri toplamının minimum olmasını sağlamaktadır. Gerçek ordinat değeri Y_i, teorik ordinat değeri ise $f(x)$ veya y_i ile göstereceğiz.

En küçük Kareler Doğrusu

Deneysel verilerden elde edilen (x_i, Y_i) noktalarının arasından geçen en uygun fonksiyon doğrusal bir polinom olması durumunda

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x$$

doğru denkleminden yararlanılır. Bu doğru denkleminde a_0 ve a_1 katsayılarını bulmak için en küçük kareler yönteminden yararlanılır. En küçük kareler yöntemi, gerçek ve teorik ordinatlar arasındaki farkların kareleri toplamının minimum olmasını sağlamaktadır. Bunun matematiksel ifadesi

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(x_i))^2 = min$$

ile verilir. Bu şartlara uygun olarak doğru denklemindeki a_0 ve a_1 katsayılarını hesaplamak için kareler toplamını E fonksiyonu ile gösterirsek,

$$E = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2$$

yada

$$E = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a_0 - a_1 x_i))^2$$

olur. E'nin minumum olması ancak (türev konusunda fonksiyonun ekstrumum noktalarında bilinmiyenlere göre kismi türevleri sıfır olması gerektiği için) a_0 ve a_1'e göre kismi türevleri alınarak sıfıra eşitlenmesiyle mümkün olur.

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a_0 - a_1 x_i)\, x_i = 0 \tag{18}$$

(17) ve (18) denklemleri a_0 ve a_1 bilinmiyenlerine göre iki lineer denklem sistemidir ve denklemler düzenlenirse aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$n\, a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{19}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i \tag{20}$$

Sistemin çözümünden:

$$a_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{21}$$

$$a_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{22}$$

bulunur. (21) ve (22) denklemlerini akılda daha kalıcı olacak şekilde kısaltmalar yaparak yazalım. Bu kısaltmaları yapmak için:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{23}$$

yazarsak

$$a_1 = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - (S_x)^2}, \qquad a_0 = \frac{S_{xx}S_y - S_{xy}S_x}{nS_{xx} - (S_x)^2} \tag{24}$$

olur. Denklem (24) den a_0 ve a_1 bulunarak (x, Y_i) noktaları arasından geçen en iyi $y = a_0 + a_1 x$ doğru denklemi elde edilir. Konuyu anlamak için aşağıdaki örnekleri çözelim.

Örnek: Bir işletmenin 2009-2013 yıllarında yaptığı reklam masrafları ile bu süre içerisindedeki satış tutarları yanda verilmiştir. Buna göre

(a) Bu noktalardan geçen doğruyu en küçük kareler yöntemiyle bulunuz.

(b) Belirlenen doğru denklemine ve yapılan reklam masraflarına dayanarak satış tutarının teorik değerini hesaplayınız.

Yıllar	Reklam Masrafı (Milyon TL)	Satışlar (Milyon TL)
2009	2	25
2010	1	20
2011	5	35
2012	4	45
2013	3	25

Tablo 5: Tablo 5

Çözüm: *(a)*

$$n = 5 \quad S_x = 15 \quad S_y = 150 \quad S_{xy} = 500 \quad S_{xx} = 55$$

$$n\, a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \Longrightarrow 5\, a_0 + 15\, a_1 = 150$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i \Longrightarrow 15\, a_0 + 55\, a_1 = 500$$

$$a_1 = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - (S_x)^2} = \frac{5.500 - 15.150}{5.55 - 15^2} = 5$$

$$a_0 = \frac{S_{xx}S_y - S_{xy}S_x}{nS_{xx} - (S_x)^2} = \frac{55.150 - 500.15}{5.55 - 15^2} = 15$$

x_i	Y_i	x_i^2	$Y_i x_i$
2	25	4	50
1	20	1	20
5	35	25	175
4	45	16	180
3	25	9	75
$\sum x = 15$	$\sum Y = 150$	$\sum x^2 = 55$	$\sum Yx = 500$

Tablo 6: Tablo 6

o halde

$$y = 15 + 5x$$

bulunur.

(b) Teorik değerleri:

$$\begin{aligned} y(2) &= 15 + 5.2 = 25 \\ y(1) &= 15 + 5.1 = 20 \\ y(5) &= 15 + 5.5 = 40 \\ y(4) &= 15 + 5.4 = 35 \\ y(3) &= 15 + 5.3 = 30 \end{aligned}$$

Örnek: Yandaki verilerine en uygun en küçük kareler $y = a_0 + a_1 x$ doğrusunu bulunuz.

x_i	Y_i
3	10
5	15
6	18
7	25
9	32

Tablo 7: Tablo 7

Çözüm:

$$n = 5 \quad S_x = 30 \quad S_y = 30 \quad S_{xy} = 676 \quad S_{xx} = 200$$

$$5\, a_0 + 30\, a_1 = 100$$

$$30\, a_0 + 200\, a_1 = 676$$

$$a_0 = -2.8 \qquad a_1 = 3.8$$

x_i	Y_i	x_i^2	$Y_i x_i$
3	10	9	30
5	15	25	70
6	18	36	108
7	25	49	175
9	32	81	288
$\sum x = 30$	$\sum Y = 100$	$\sum x^2 = 200$	$\sum Yx = 676$

Tablo 8: Tablo 8

o halde

$$y = -2.8 + 3.8x$$

bulunur. Teorik değerleri bulalım

$$\begin{aligned} y(3) &= -2.8 + 3.8 \times 3 = 8.6 \\ y(5) &= -2.8 + 3.8 \times 5 = 16.2 \\ y(6) &= -2.8 + 3.8 \times 6 = 20.0 \\ y(7) &= -2.8 + 3.8 \times 7 = 23.8 \\ y(9) &= -2.8 + 3.8 \times 9 = 31.4 \end{aligned}$$

En Küçük Kareler Parabolü

Parabol denklemini bulmak için en küçük kareler doğrusunda takip ettiğimiz aşamaları buradada yapmamız gerekir. Quadratik yada ikinci derece polinomu

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

biçiminde ele alalım. Yine gerçek ve teorik ordinatlar arasındaki farkların kareleri toplamının minimum olması sağlanmalıdır. Yani;

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \right)^2 = min$$

olmalıdır. Bu eşitlikte polinomum bilinmiyen katsayılarına göre birinci türevleri sıfırdır,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right) x_i = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} &= -2 \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right) x_i^2 = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Denklem (25) tekrar düzenlenise ağağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$\begin{aligned} n\, a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_2 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right) a_2 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \right) a_1 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i^2 \end{aligned}$$

bu denklem sisteminin çözümünden a_0, a_1, a_2 bulunarak istenen polinom elde edilmiş olur.

Bu durumu n. dereceden

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

bir polinom için genellersek o zaman bulmamız gereken denklemi matris formunda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i^m \end{bmatrix} \tag{26}$$

yazabiliriz.

Örnek: Yandaki verilerine en uygun en küçük kareler $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ parabolünü bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 4\, a_0 + 3\, a_1 + 29\, a_2 &= 8 \\ 3\, a_0 + 29\, a_1 + 45\, a_2 &= 5 \\ 29\, a_0 + 45\, a_1 + 353\, a_2 &= 79 \end{aligned}$$

$$a_0 = 1394/1639 \qquad a_1 = -631/3278 \qquad a_2 = 585/3278$$

x_i	Y_i
-3	3
0	1
2	1
4	3

Tablo 9: Tablo 9

x_i	Y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$Y_i x_i$	$Y_i x_i^2$
-3	3	9	-27	81	-9	27
0	1	0	0	0	0	0
2	1	4	8	16	2	4
4	3	16	64	256	12	48
3	8	29	45	353	5	79

Tablo 10: Tablo 10

o halde parabol denklemi

$$y = \frac{585}{3278}x^2 - \frac{631}{3278}x + \frac{1394}{1639} = 0.178462x^2 - 0.192495x + 0.850519$$

bulunur.

$y = a_0 e^{a_1 x}$ Yapısındaki Lineer Olmayan Denklemlerin Lineerizasyon Yöntemiyle Eğri Uydurulması

Bu tip lineer olmayan denklemlerin lineer yapıda yazılıp çözülebilmesi için denklemlerin yeniden düzenlenmesi gerekir, bunun içinde denklemin her iki tarafının logaritması alınarak orijinal değişkenleride içine alacak şekilde yeni değikenler atanmalıdır. Yani;

$$y = a_0 e^{a_1 x}$$

denklemini ele alalım. Denklemin her iki tarafının logaritmasını alalım:

$$\ln y = a_1 x + \ln(a_0).$$

Daha sonda a_0 ve a_1 değişkenlerini içine alan yeni değişkenler atayalım:

$$\ln y = Y \qquad x = X \qquad \ln(a_0) = A \qquad \text{ve} \qquad a_1 = B \tag{27}$$

böylece yeni lineer denklemimiz

$$Y = A + BX$$

olur. Bu işleme veri lineerizasyonu denir. Bu durumda yeni hata denklemimiz

$$E = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - A - BX_i)^2 = min$$

olup. Daha önce yaptığınız en küçük kareler doğrusunun bulunuş işlemleri tekrar edilirse

$$n\ A + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) B = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\ A + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) B = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sisteminden A ve B bilinmiyenleri buluruz, daha sonrada (27) den yararlanarak orijinal değişkenlerimiz olan a_0 ve a_1 i buluruz.

Örnek: Yandaki beş verileriye en uygun $y = a_0 e^{a_1 x}$ exponansiyel eğrisini lineerizasyon yöntemiyle bulunuz.

Çözüm:

$$5\ A + 10\ B = 6.198860$$
$$10\ A + 30\ B = 16.309742$$

denklem sistemi çözülürse

$$A = 0.457367 \qquad B = 0.3912023$$

bulunur. O halde orijinal değişkenlerimiz

$$a_0 = e^{0.457367} = 1.579910 \qquad B = a_1 = 0.3912023$$

eğri denklemide

$$y = 1.579910\ e^{0.3912023x}$$

bulunur.

x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	1.5	2.5	3.5	5.0	7.5

Tablo 11: Tablo 11

x_i	y_i	X_i	$Y_i = \ln(y_i)$	X_i^2	$Y_i X_i$
0.0	1.5	0.0	0.405465	0.0	0.000000
1.0	2.5	1.0	0.916291	1.0	0.916291
2.0	3.5	2.0	1.252763	4.0	2.505526
3.0	5.0	3.0	1.609438	9.0	4.828314
4.0	7.5	4.0	2.014903	16.0	8.059612
		10.0	6.198860	30.0	16.309743

Tablo 12: Tablo 12

$y = a_0 x^{a_1}$ *Yapısındaki Lineer Olmayan Denklemlerin Lineerizasyon Yöntemiyle Eğri Uydurulması*

şimdide, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ noktalarına uygun lineer olmayan

$$y = a_0 x^{a_1}$$

kuvvet fonksiyonu elde etmeye çalışalım, denklemin her iki tarafının doğal logaritmasını alalım:

$$\ln y = \ln\left(a_0 x^{a_1}\right) = \ln(a_0) + a_1 \ln x$$

a_0 ve a_1 değişkenlerini içine alan yeni değişkenler atayalım:

$$\ln y = Y \qquad \ln x = X \qquad \ln(a_0) = A \qquad \text{ve} \qquad a_1 = B \tag{28}$$

böylece yeni lineer denklemimiz

$$Y = A + BX$$

olur. Bu işleme veri lineerizasyonu denir. Bu durumda yeni hata denklemimiz

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - A - BX_i\right)^2 = min$$

olup. Daha önce yaptığınız en küçük kareler doğrusunun bulunuş işlemleri tekrar edilirse

$$n\ A + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) B = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\ A + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) B = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sisteminden A ve B bilinmiyenleri buluruz, daha sonrada (28) den yararlanarak orijinal değişkenlerimiz olan a_0 ve a_1 i buluruz.

Örnek: Yandaki beş veriye en uygun

(a) $y = a_0 x^{a_1}$ eğrisini

(b) $y = a_0 x^2$ eğrisini

(c) $y = a_0 / x$ eğrisini

lineerizasyon yöntemiyle bulunuz.

x_i	2.0	2.3	2.6	2.9	3.2
y_i	5.1	7.5	10.6	14.4	19.0

Tablo 13: Tablo 13

Çözüm:

(a)

$$5\ A + 4.709430\ B = 11.61670$$
$$4.709430\ A + 4.57372\ B = 11.328$$

denklem sistemi çözülürse

$$A = -0.314393 \qquad B = 2.80048$$

bulunur. O halde orijinal değişkenlerimiz

$$a_0 = e^{-0.314393} = 0.730232 \qquad B = a_1 = 2.80048$$

eğri denklemide

$$y = 0.730232\ x^{2.80048}$$

bulunur.

x_i	y_i	$X_i = \ln(x_i)$	$Y_i = \ln(y_i)$	X_i^2	$Y_i X_i$
2.0	5.1	0.693147	1.62924	0.480453	1.1293
2.3	7.5	0.832909	2.01490	0.693737	1.67823
2.6	10.6	0.955511	2.36085	0.913001	2.25582
2.9	14.4	1.064710	2.66723	1.133610	2.83893
3.2	19.0	1.163150	2.94444	1.352920	3.42483
		4.709430	11.61670	4.57372	11.328

Tablo 14: Tablo 14

(b) Bu durumda sadece birinci denklemi kullanmak zorundayız

$$5\ A + 4.709430 \times 2 = 11.61670 \quad \Longrightarrow \quad A = 0.439568$$

bulunur. O halde orijinal değişkenlerimiz

$$a_0 = e^{0.439568} = 1.55204$$

eğri denklemide

$$y = 1.55204\ x^2$$

bulunur.

(c) Bu durumda da sadece birinci denklemi kullanmak zorundayız

$$5\ A + 4.709430 \times (-1) = 11.61670 \quad \Longrightarrow \quad A = 3.26523$$

bulunur. O halde orijinal değişkenlerimiz

$$a_0 = e^{3.26523} = 1.55204$$

eğri denklemide

$$y = 26.1861/x$$

bulunur.

En Küçük Kareler Yöntemiyle Kullanılacak Fonksiyonun seçimi

Kullanılacak fonksiyonun seçimi için aşağıdaki işlemler yapılır.

1. Farklar tablosunun incelenmesi polinomun derecesi hakkında bilgi verebilir.
2. Gragfik çizilir ve simetriler aranır. Eğer y eksenine göre simetri varsa

   $$y = \sum_{i=1}^{n} c_k x^{2k+2}$$

   gibi bir polinom kullanılanbilir.
3. Eğer verilen değerler periyodik olarak değişiyorsa sinüzoidal yapıda trigonometrik terimler kullanılabilir.
4. Eğer verilerde $x = 0$ yada negatif değerler içermiyorsa logaritmik fonksiyonlar kullanılabilir.
5. Bütün değerler pozitif yada negatif ise ve orijinden geçmiyorsa exponansiyel fonksiyon kullanılabilir.
6. $y = 0$ değeri yok ise ters fonksiyonlar kullanılabilir.
7. Bazı hallerde verilen değerlere dayanılarak çizilen grafik parçalara ayrılıp her parçaya ayrı bir eğrilik uydurulabilir.

Lagrange interpolasyon Polinomları

Newtonun ileriye ve geriye interpolasyon formülleri eşit aralıklı veri noktaları için geçerli olmasına karşın Lagrange interpolasyon polinom formülü eşit aralıklı olmayan veri grubu içinde genel formül vermektedir. Bu polinomlarda, eğri uydurmalarda olduğu gibi katsayılarını hesaplamak için ön işlemlerede gerek kalmadan direk poinom hesaplanabilmektedir.

(x_0, y_0), ve (x_1, y_1) noktalarından geçen polinomu Fransız matematikçi Joseph Louis Lagrange, birinci dereceden Lagrange polinomu olarak bu iki noktadan da geçecek şekilde aşağıdaki biçimde yazmıştır:

$$P_1(x) = y = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0) \tag{29}$$

Denk. (29) içine verilen iki noktayı sırasıyla yazarsak

$$y_0 = a_0(x_0 - x_1) + a_1(x_0 - x_0) \quad \text{yada} \quad a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)} \tag{30}$$

$$y_1 = a_0(x_1 - x_1) + a_1(x_1 - x_0) \quad \text{yada} \quad a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \tag{31}$$

a_0 ve a_1 katsayıları bulunur, bulunanlar tekrar Denk. (29) içine yerleştirilirse

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1 \tag{32}$$

Lagrange polinomu elde edilir. Denk. (32) iki noktadan geçen bir doğru denklemi olduğundan x e göre lineer bir fonksiyondur. Eğer denklemde x yerine x_0 yazılırsa y_0 ve eğer x yerine x_1 yazılırsa y_1 değeri elde edildiği kolayca görülebilir. Denklem (32) de y_0 ve y_1 Lagrange polinumu katsayıları

$$L_{1,0} = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}, \quad L_{1,1} = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdide, benzer şekilde (x_0, y_0), (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) verilen üç noktadan geçen ikinci dereceden Lagrange polinomu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_2(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) + a_1(x-x_0)(x-x_2) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \tag{33}$$

bu üç noktadan geçen polinomun katsayıları yukarıdaki gibi hesaplandığında,

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_3 \tag{34}$$

polinomu elde edilir. Bu denklemdede verilen x_0, x_1 ve x_2 noktaları deklemdeki x yerlerine yazılırsa sırasıyla y_0, y_1 ve y_2 değerleri elde edilir. Denklem (34) de y_0, y_1 ve y_2 Lagrange polinumu katsayıları

$$L_{2,0} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \; L_{2,1} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \; L_{2,2} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

şeklinde gösterilir.

Denklem (32) ve (34) de ifade edile Lagrange polinomlarını genellersek, verilen n tane $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ noktalarından geçen n. dereceden Lagrange polinomu,

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_1 \\ & + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}y_k \\ & + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n \end{aligned} \tag{35}$$

elde edilir. Bu poliomu kısaca toplam sembolünde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}\, y_k \tag{36}$$

buradaki $L_{n,k}$ Lagrange katsayılarıda

$$L_{n,k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \tag{37}$$

gibi ifade edilir.

Örnek: $y = \sin \pi x$ fonksiyonu için Lagrange interpolasyon polinomunu türetiniz interpolasyon düğüm noktalarını $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ olarak kabul ediniz.

Çözüm. x_0, x_1, x_2 ye tekabül eden değerler hesaplayarak

$$y_0 = 0, \; y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \; y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

şeklinde bulunur. (5) formülünü kullanarak

$$P_2(x) = \frac{(x-\frac{1}{6})\times(x-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{6}\times(-\frac{1}{2})}\times 0 + \frac{x\times(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}\times(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}\times\frac{1}{2} + \frac{x\times(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}\times 1 = \frac{7}{2}x - 3x^2$$

şeklinde Lagrange polinomunu türetiriz.

Örnek: $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki tablo ile verilmiştir $f(323.5)$ değerini bulunuz.

x	y
321.0	2.50651
322.8	2.50893
324.2	2.51081
325.0	2.51188

Çözüm: $x = 323.5$; $n = 3$ kabul edelim. Bu taktirde (5) formülüne göre

$$\begin{aligned} f(323.5) &= \frac{(323.5-322.8)(323.5-324.2)(323.5-325.0)}{(321.0-322.8)(321.0-322.8)(321.0-325.0)}.2.50621 \\ &+ \frac{(323.5-321.0)(323.5-324.2)(323.5-325.0)}{(322.8-321.0)(322.8-324.2)(322.8-325.0)}.2.50893 \\ &+ \frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-325.0)}{(324.2-321.0)(324.2-322.8)(324.2-325.0)}.2.51081 \\ &+ \frac{(323.5-321.0)(323.5-322.8)(323.5-324.2)}{(325.0-321.0)(325.0-322.8)(325.0-324.2)}.2.51188 \\ &= -0.07996 + 1.18794 + 1.83897 - 0.43708 = 2.50987 \end{aligned}$$

bulunur.

Lagrange İnterpolasyon Formülünün Hatası

$y = f(x)$ fonksiyonu için $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ özelliğine sahip $P_n(x)$ Lagrange polinomunu bir önceki kısımda bulmuştuk.

$$R_n(x) = f(x) - P_n$$

fonksiyonuna kalan terim fonksiyonu denir. Düğüm noktaları dışında ele alınan x noktasında interpolasyon polinomu ile bulunan değer uygun $f(x)$ değerine ne kadar yakın olmaktadır. Bir başka değişle bu x noktasındaki $R_n(x)$ değeri ne kadar büyüktür. $R_n(x)$ küçük oldukça $P_n(x)$ değeri x noktasında $f(x)$ değerine yaklaşmaktadır. Bu yaklaşma derecesini bulabilmemiz için $f(x)$ fonksiyonu belirli özellikli bir fonksiyon olmalıdır. Düğüm noktalarının tümünü içerdiği $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun $(n+1)$. mertebeye kadar tüm türevlerinin mevcut olduğunu varsayalım.

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

olmak üzere

$$U(x) = f(x) - P_n(x) - k\Pi_{n+1}(x) \tag{38}$$

fonksiyonunu ele alalım. $U(x)$ fonksiyonunu

$$x_0, x_1, \cdots, x_n$$

noktalarında sıfır olacağı açıktır. k'nı öyle seçelim ki, $U(x)$ fonksiyonunun $(n+2)$. sıfırı $[a, b]$ aralığının keyfi şekilde seçilmiş fakat $i = 0, 1, \cdots, n$ olmak üzere x_i lerden farklı olan belirli bir $\bar{x}$ noktasında gerçekleşmiş olsun. Bunun için

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) - k\Pi_{n+1}(\bar{x}) = 0$$

olması yeterlidir. Burada $\Pi_{n+1}(\bar{x}) \neq 0$ olması nedeniyle

$$k = \frac{f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} \tag{39}$$

olmalıdır. k çarpanının bu değeri için $U(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $(n+2)$ köke sahip olacaktır ve

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarının her birinin uç noktalarında sıfıra eşit olacaktır. Her aralığa Rolle teoremini uygularsak, sonuçta $U'(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında $(n+1)$ tane sıfıra sahip olacağı ortaya çıkar. Rolle teoremini $U'(x)$ fonksiyonuna uygularsak, sonuçta $U''(x)$ fonksiyonunun n tane noktada sıfıra eşit olacağı ortaya çıkar. Bu işlemleri tekrarlarsak sonuçta bakılan $[a,b]$ aralığında $U^{(n+1)}(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfıra sahip olacağı ortaya çıkar. $U^{(n+1)}(x)$ fonksiyonunu sıfır yapan nokta ξ noktası olsun. Yani $U^{(n+1)}(\xi) = 0$ olacaktır.

$$P_n^{(n+1)}(x) = 0 \text{ ve } \Pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

olduğu için (1) formülünden

$$U^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$$

bulunacaktır. $x = \xi$ kabul edersek

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$$

veya

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{40}$$

bulunacaktır. (2) ve (3) ün sağ tarafını kıyaslarsak

$$\frac{f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})}{\Pi_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

veya

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\Pi_{n+1}(\bar{x}) \tag{41}$$

elde edilecektir. $\bar{x}$ noktası keyfi şekilde ele alındığı için (4) formülü

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\Pi_{n+1}(x) \tag{42}$$

şekilde de yazılabilir. Burada ξ, x değerine bağlıdır ve $[a,b]$ nın bir iç noktası olmaktadır. (5) formülü $[a,b]$ aralığının düğüm noktaları dahil tüm noktaları için geçerlidir.

$$M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$$

olsun. Bu taktirde Lagrange interpolasyon formülünün mutlak hatası için

$$|R(x)| = |f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.|\Pi_{n+1}(x)| \tag{43}$$

eşitsizliği elde edilecektir.

Örnek: $\sqrt{115}$ sayısının değerini y= $\sqrt{x}$ fonksiyonu için türetilmiş Lagrange interpolasyon formülü yardımıyla hangi hassasiyetle hesaplama mümkündür $x_0 = 100,\ x_0 = 121,\ x_0 = 144$, düğüm noktaları olarak verilmiştir.

Çözüm:

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-1/2},\ y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2},\ y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

Burada

$$M_3 = \max_{100 \le x \le 144} |y'''| = \frac{3}{8}.10^{-5}$$

bulunacaktır. (6) formülüne göre

$$|R_2| = \frac{3}{8}.10^{-5}.\frac{1}{3!}|(115-100)(115-121)(115-144)| = \frac{1}{16}.10^{-5}.15,6.29 \approx 1,6.10^{-3}$$

olacaktır.

Newton İnterpolasyon Polinomları

Newton interpolasyon polinomları verilen noktalara eğri uydurmada kullanılan popüler bir yöntemdir. n noktadan geçen n. dereceden Newton polinomu aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} P(x) =& a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &+ \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{44}$$

ifade edilir. Bu yapıda polinom gösteriminin bir özelliği, a_0 dan a_n e kadar bütün katsayılar basit matematiksel işlemlerle bulunabilir. Polinomun katsayıları bilinirse, verilen x_i verileri arasındaki bir x araverisi için polinomun değeri bulunabilir.

Newton interpolasyon polinomlarını popüler yapan Lagrange polinomlarından farklı olarak $P_n(x)$ polinomu bulmak için $P_{n-1}(x)$ polinomundan yararlanılmasıdır. Lagrange polinomlarında $P_n(x)$ ve $P_{n-1}(x)$ polinomları birbirinden tamamen bağımsız yapılardadır. Newton interpolasyo polinomlarında veri noktaları herhangi azalan yada artan bir sıralamaya sahip olmayabilir. Dahası herhangi bir nokta grubu verildiğinde hesaplanan a_i katsayılarına yeni veri grubu geldiğinde önceden hesaplanan a_i katsayıları değiştirilmeden ilave katsayılar yazarak polinomu yeniden bulabiliriz. Bu durumu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0) \tag{45}$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \tag{46}$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \tag{47}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} P_n(x) = & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \cdots \\ & + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{48}$$

Dolayısıyla $P_n(x)$ polinomunu $P_{n-1}(x)$ polnomundan yararlanarak kısaca

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{49}$$

yazılabilir.

Örnek: $x_0 = 1,\ x_2 = 3,\ x_2 = 4$ ve $x_3 = 5$ noktaları ve onların katsayıları $a_0 = 5,\ a_2 = -2,\ a_2 = 1,\ a_3 = -0.5$ ve $a_4 = 0.1$ verilsin, $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ ve $P_4(x)$ polinomlarını bulunuz ve $k = 1, 2, 3, 4$ için $P_k(2.5)$'i hesaplayınız.

Çözüm: (45) den (48)'e formülleri kullanırsak,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 5 - 2(x-1) \\ P_2(x) &= 5 - 2(x-1) + 1\,(x-1)(x-3) \\ P_3(x) &= P_2(x) - 0.5(x-1)(x-3)(x-4) \\ P_4(x) &= P_3(x) + 0.1(x-1)(x-3)(x-4)(x-5) \end{aligned}$$

bulunur. $x = 2.5$ da polinomların değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} P_1(2.5) &= 5 - 2(1.5) = 2 \\ P_2(2.5) &= P_1(2.5) + 1\,(1.5)(-0.5) = 1.25 \\ P_3(2.5) &= P_2(2.5) - 0.5(1.5)(-0.5)(-1.5) = 0.6875 \\ P_4(2.5) &= P_3(2.5) + 0.1(1.5)(-0.5)(-1.5)(-2.5) = 0.40625 \end{aligned}$$

elde edilir.

Birinci Mertebe Newton Polinomu

Newton interpolasyon polinomunun bu en basit yapısı (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) iki noktayı bir doğruyla birleştirilerek elde edilir. Bu yapının polinom yapısı

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \tag{50}$$

biçiminde ifade edilir. Bu doğru denkleminde a_0 ve a_1 katsayılarını iki noktadan geçen doğru denkleminden rahatlıkla bulabiliriz, ayrıca a_1 doğrunun eğimini temsil ettiğinden eğim formülündende a_1 bulabiliriz. Bu işlemlere ilaveten yandaki şekilde benzer üçgenlerden yararlanarak a_0 ve a_1 katsayılarını bulalım

$$\frac{DE}{CE} = \frac{AB}{CB} \quad \text{yada} \quad \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{51}$$

Denklem (51) de $f(x)$ gerekli düzenlemeler yapılıp yanlız bırakılırsa

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{52}$$

bulunur. Denklem (50) ile (52) karşılaştırılırsa a_0 ve a_1 katsayılarını aşağıdaki gibi bulabiliriz

$$a_0 = y_0 \quad \text{ve} \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{53}$$

burada metodun sağlıklı işlemesi için verilen noktaların birbirine yakın olmasına dikkat etmeliyiz, aksi takdirde interpolasyon polinomu doğrusal olduğundan istenen aradeğerin sonucu sağlılklı olmayabilir.

İkinci Mertebe Newton Polinomu

Bir eğriye doğru çizerek yaklaşma sağlıklı bir sonuç sağlamaz. Dolayısıyla, bir eğriye yaklaşmak istiyorsak verilen aralıkta bir eğri çizmek gerekir. Bunun için ikinci ve daha üst mertebe Newton polinomları kullanılır. (x_0, y_0), (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) gibi üç nokta verildiğinde ikinci derece Newton interpolasyon polinomu aşağıdaki formda olur:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{54}$$

Bu denklem üç noktadan geçen parabol denklemidir. a_0, a_1 ve a_2 katsayılarını bulmak için sırasıyla denklem (54) içine verilen x değerleri yazılır. Denklemin içine $x = x_0$ ve $f(x_0) = y_0$ yazılırsa $a_0 = y_0$ bulunur. İkinci nokta olan $x = x_1$ ve $f(x_1) = y_1$ denklem (54) içine yerleştirilirse (ve $a_0 = y_0$ da)

$$y_1 = y_0 + a_1(x - x_0) \quad \text{yada} \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{55}$$

bulunur.

Üçüncü nokta $x = x_2$ ve $f(x_2) = y_2$ denklem (54) içine yerleştirilirse (ve $a_0 = y_0$ ile $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ da)

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \tag{56}$$

bulunur. Denklem (56) de a_2 bulunup tekrar düzenlenirse

$$a_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \tag{57}$$

bulunur.

Dikkat edilirse a_0 ve a_1 katsayıları birince mertebe de çıkan katsayılarla aynıdır. Bu durumu daha öncede izah etmiştik, bundan faydalanarak daha üst mertebe katsayılarda bulabiliriz.

Üçüncü Mertebe Newton Polinomu

Verilen (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) dört nokta için, Newton interpolasyon polinomunu dört noktadan geçecek şekilde

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{58}$$

ifade edilir.

Formulasyondaki a_0, a_1 ve a_2 katsayıları ikinci mertebe polinomdaki katsayılarla aynıdır. Denklem (58) deki a_4 katsayısnipolını bulmak için denklemin içinde $x = 3$ ve $f(x_3) = y_3$ yazılır a_3 yanlız bırakılır vede düzenlenirse

$$a_3 = \frac{\dfrac{\dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} - \dfrac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{(x_3 - x_0)} \tag{59}$$

bulunur.

Newton Polinomunun Genel Bir Yapısı ve Onun Katsayıları

a_0, a_1, a_2 ve a_3 katsayılarının eşitlerine dikkat edilirse herbir katsayıların belli bir kalıpla yazıldığı anlaşılmaktadır. Bu kalıba biz *sonlu bölünmüş farklar* olarak adlandırmaktayız.

İki nokta için ilk sonlu bölünmüş fark aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{60}$$

İki birinci bölünmüş farkın farkını temsil eden ikinci bölünmüş fark

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \tag{61}$$

gibi ifade edilir.

Benzer şekilde, $n$ci sonlu bölünmüş farkta

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1]}{x_n - x_1} \tag{62}$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Bu durumda Newton interpolasyon polinomunun katsayılarını

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f[x_1, x_0] \\ a_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\ &\vdots \\ a_n &= f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \end{aligned} \tag{63}$$

biçiminde yazabilriz.

Bu tanımlamalarla birlikte, $n$ci mertebe Newton polinomu yani denklem (44) yi aşağıdaki gibi yazabiliriz..

$$P(x) = \underbrace{y_0}_{a_0} + \underbrace{f[x_1, x_0]}_{a_1}(x - x_0) + \underbrace{f[x_2, x_1, x_0]}_{a_2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \underbrace{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]}_{a_n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{64}$$

Not: Newtonun interpolasyon yönteminde, veri noktalar arasındaki aralıklar eşit olmak zorunda değildir.

Tablo 15: Tablo 15

x	y	Birinci	İkinci	Üçüncü	Dördüncü
x_0	y_0				
		$f[x_1, x_0]$			
x_1	y_1		$f[x_2, x_1, x_0]$		
		$f[x_2, x_1]$		$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$	
x_2	y_2		$f[x_3, x_2, x_1]$		$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$
		$f[x_3, x_2]$		$f[x_4, x_3, x_2, x_1]$	
x_3	y_3		$f[x_4, x_3, x_2]$		
		$f[x_4, x_3]$			
x_4	y_4				

Örnek:
Beş veri noktası ve onların değerleri yanda verilmiştir

x	1	2	4	5	7
y	50	5	-3	-40	10

Tablo 16: Veri Değerleri

(a) Verilen noktalardan geçen dördüncü dereceden Newton Polinomunu bulunuz. Bölünmüş fark tablosunu kullanarak katsayıları hesaplayınız.

(b) Bulunan Newton polinomundan yararlanarak $x = 3$ için interpolasyon polinomunun değerini bulunuz.

Çözüm. *(a)* Verilmiş beş nokta için Newton polinomu

$$P(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + a_3(x-1)(x-2)(x-4) + a_4(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

a_i katsayıları aşağıdaki bölünmüş fark tablosunda hesaplanabilir:
katsayışarın hesaplanmasıyla, polinom:

Tablo 17: Bölünmüş Fark Tablosu

x_i	y_i	Birinci	İkinci	Üçüncü	Dördüncü
1	54				
		$\frac{7-54}{2-1} = -47$			
2	7		$\frac{-5+47}{4-1} = 14$		
		$\frac{-3-7}{4-2} = -5$		$\frac{-10-14}{5-1} = -6$	
4	-3		$\frac{-35+5}{5-2} = -10$		$\frac{6+6}{7-1} = 2$
		$\frac{-38+3}{5-4} = -35$		$\frac{20+10}{7-2} = 6$	
5	-38		$\frac{25+35}{7-4} = 20$		
		$\frac{12+38}{7-5} = 25$			
7	12				

$$P(x) = 54 - 47(x-1) + 14(x-1)(x-2) - 6(x-1)(x-2)(x-4) + 2(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

(b) yukarıdaki polinomda $x = 3$ yazılırsa

$$P(3) = 54 - 47(3-1) + 14(3-1)(3-2) - 6(3-1)(3-2)(3-4) + 2(3-1)(3-2)(3-4)(3-5) = 8$$

bulunur.

Örnek:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

Gauss hata fonksiyonunun değerleri Tablo (23) de verilmiştir. $erf(0.5437)$ in değerini hesaplayınız.

$y = erf(x)$ fonksiyonu için fark tablosu ve sonlu farkları aşağıda verilmiştir.

yukarıdaki tabloda elde ettiğimiz değerleri yerlerine yazarsak Newton polinomu:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0.5292437 + 0.865500(x - 0.51) - 0.449167 \times (x - 0.51)(x - 0.52) \\ &\quad - 0.11665 \times (x - 0.51) \times (x - 0.52) \times (x - 0.54) \\ &\quad + 0.0551667 \times (x - 0.51) \times (x - 0.52) \times (x - 0.54) \times (x - 0.55) \end{aligned}$$

x_k	$y = f[x_k]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0.51	$\overbrace{0.5292437}^{a_0}$				
		$\overbrace{0.865500}^{a_1}$			
0.52	0.5378987		$\overbrace{-0.449167}^{a_2}$		
		0.852025		$\overbrace{-0.11665}^{a_3}$	
0.54	0.5549392		-0.453833		$\overbrace{0.0551667}^{a_4}$
		0.838410		-0.11334	
0.55	0.5633233		-0.459500		
		0.824625			
0.57	0.5798158				

Tablo 18: $erf(x)$ fonksiyonunun fark tablosu

$$\begin{aligned}
P(0.5437) &= 0.5292437 + 0.865500(0.5437 - 0.51) \\
&\quad - 0.449167 \times (0.5437 - 0.51)(0.5437 - 0.52) \\
&\quad - 0.11665 \times (0.5437 - 0.51) \times (0.5437 - 0.52) \times (0.5437 - 0.54) \\
&\quad + 0.0551667 \times (0.5437 - 0.51) \times (0.5437 - 0.52) \times (0.5437 - 0.54) \times (0.5437 - 0.55) \\
&= 0.558052
\end{aligned}$$

Sonlu Farklar

$y = f(x)$ verilmiş fonksiyon olsun. $\Delta x = h$ argumantın ilerlemesidir. Bu taktirde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

İfadesine y fonksiyonunun 1.sonlu farkı denir. Benzer şekilde yüksek mertebeden sonlu farklar tanımlanabilir:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \ (n = 2, 3, \cdots)$$

Örnek:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y &= \Delta(\Delta y) \\
&= \Delta(f(x + \Delta x) - f(x)) \\
&= \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) \\
&= (f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)) - (f(x + \Delta x) - f(x)) \\
&= f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)
\end{aligned}$$

olacaktır

Örnek: $P(x) = x^3$ fonksiyonu için $\Delta x = 1$ kabul ederek tüm sonlu farkları türetiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\Delta P(x) &= (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \\
\Delta^2 P(x) &= \left[3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1\right] - \left(3x^2 + 3x + 1\right) = 6x + 1 \\
\Delta^3 P(x) &= (6(x+1) + 6) - (6x + 6) = 6 \\
\Delta^n P(x) &= 0 \text{ eğer n>3 ise}
\end{aligned}$$

$P(x)$ in 3. mertebeden sonlu farkının sabit olduğuna dikkat edelim genelde aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem: Eğer $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ n. dereceden bir polinom ise, bu taktirde

$\triangle^n P_n(x) = n! a_0 h^n = sabit$ dir. Burada $\triangle x = h$ dir.

İspat:

$$\triangle P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + a_1[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \cdots + a_{n-1}[(x+h) - x]$$

Küçük parantezdeki ifadeyi Newton binom formülü yardımıyla sadeleştirirsek $\triangle P_n(x)$ ifadesinin $(n-1)$. dereceden bir polinom olacağı kesindir. Yani

$$\triangle P(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

Burada $b = n.h.a_0$ dir. Düşünceleri benzer şekilde tekrarlarsak 2. mertebeden sonlu fark ifadesinin $(n-2)$. dereceden bir polinom olacağı kesinlik kazanacaktır. Yani

$$\triangle^2 P_n(x) = c_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \cdots + c_{n-2}$$

dir. Açıktır ki,

$$c_0 = (n-1)hb_0 = n(n-1)h^2 a_0$$

olacaktır. Nihayet, sonuçta

$$\triangle^n P_n(x) = n! a_0 h^n = sabit$$

buluruz. Neticede $s > n$ özellikli $s \in N$ sayısı için

$$\triangle^s P_n(x) = 0$$

olacaktır. Sembolüne bir operatör gibi bakılabilir. Bu operatörün temel özelliklerini sırası ile yazalım

1. $\triangle(u+v) = \triangle u + \triangle v$
2. $\triangle(Cu) = C \triangle u$
3. $\triangle^m(\triangle^n y) = \triangle^{m+n} y (m, n$ negatif olmayan tam sayılardır$)$

$\triangle^0 y = y$ kabul edilmektedir. Formulünden $f(x + \triangle x) = f(x) + \triangle f(x)$ eşitliği yazılabilir. Burada $\triangle$ ya sembolik bir çarpım gibi bakılırsa

$$f(x + \triangle x) = (1 + \triangle) f(x) \tag{65}$$

Eşitliği de yazılabilir. Bu bağıntının n defa ardışık olarak uygularsak, sonuçta

$$f(x + n \triangle x) = (1 + \triangle)^n f(x) \tag{66}$$

buluruz. Newton formülünü kullanırsak, sonuçta

$$f(x + n \triangle x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta^m f(x) \tag{67}$$

elde edilecektir. Burada $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ dır. (3) formülü yardımıyla $f(x)$ in ardışık değerleri onun muhtelif mertebeden sonlu farkıyla bulunabilir.

$$\triangle = (1 + \triangle) - 1 \tag{68}$$

eşitliği kullanırsak ve Newton binom formülü uygulayarak

$$\triangle^n f(x) = [(1+\triangle)-1]^n f(x) = (1+\triangle)^n f(x) - C_n^1 (1+\triangle)^{n-1} f(x) + C_n^2 (1+\triangle)^{n-2} f(x) - \cdots + (-1)^n f(x)$$

Elde edebiliriz. (3) formülünü kullanırsak

$$\triangle^n f(x) = f(x + n \triangle x) - C_n^1 f[x + (n-1) \triangle x] + C_n^2 f[x + (n-2) \triangle x] - \cdots + (-1)^n f(x) \tag{69}$$

bağıntısı bulunacaktır. (6) formülü, n. mertebeden sonlu farkın fonksiyonun ardışık değerleri ile bağlantısını ifade ediyor.

$f(x)$ fonksiyonu $[x, x + n \triangle x]$ aralığında n. mertebeden sürekli türeve sahip olsun. Bu taktirde

$$\triangle^n f(x) = (\triangle x)^n f^n(x + \theta n \triangle x) \tag{70}$$

formülü gerçekleşmektedir. Burada $0 < \theta < 1$ dir. (7) formülünü tümevarım bağıntı metodu ile ispatlayabiliriz. Gerçekten $n = 1$ durumunda fonksiyonun sonlu artımı hakkında Lagrange teoremi elde ediyoruz. Yani (7) formülü doğrudur. Şimdi de $k < n$ durumunda

$$\triangle^k f(x) = (\triangle x)^k f^{(k)}(x + \theta^1 k \triangle x)$$

eşitliği sağlanmış olsun. Burada $0<\theta^{'}<1$ dir. Bu taktirde

$\triangle^{k+1}f(x) = (\triangle x)^k[f(x+\triangle x) - f(x)] = (\triangle x)^k[f^{(k)}(x+\triangle x+\theta^{'}k\triangle x) - f(x+\theta^{'}k\triangle x)]$

olacaktır. $f^{(k)}(x)$ e Lağrange teoremini uygularsak

$$\triangle^{k+1}f(x) = (\triangle x)^k \triangle x f^{(k+1)}(x+\theta^{'}k\triangle x+\theta^{''}\triangle x)]$$

buluruz. Burada $0 < \theta'' < 1$ dir.

$$\frac{\theta' k + \theta''}{k+1} = \theta \tag{71}$$

kabul edersek.

$$\triangle^{k+1}f(x) = (\triangle x)^{k+1} \triangle x f^{(k+1)}[x+\theta(k+1)\triangle x]$$

elde edilecektir. Tabii ki $0 < \theta < 1$ dir. Böylece (7) formülünün doğru olduğu ispatlanmış oldu. (7) formülünden

$$f^{(n)}(x+\theta n \triangle x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$$

yazabiliriz. $\triangle x \to 0$ durumunda bu eşitliğin limitini $f(x)$ in n. mertebeden sürekli türeve sahip olacağını varsayarak

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n} \tag{72}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. Dolayısıyla küçük $\triangle x$ ler için

$$f^{(n)}(x) \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n} \tag{73}$$

bağıntısını yazabiliriz.

Fark Tabloları

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ eşit dağılım veri grubu olsun. x'in bu değerine y'nin $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ değerleri tekabül etsin. $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ ler için sonlu farklar

$$\begin{array}{rcl} \triangle y_i & = & y_{i+1} - y_i \\ \triangle^2 y_i & = & \triangle(\triangle y_i) = \triangle y_{i+1} - \triangle y_i \\ \cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \triangle^n y_i & = & \triangle(\triangle^{n-1} y_i) = \triangle^{n-1} y_{i+1} - \triangle^{n-1} y_i \end{array}$$

şeklinde bulunur. 1. denklemden

$$y_{i+1} = y_i + \triangle y_i = (1+\triangle) y_i$$

bulunur. Burada da sırası ile

$$\begin{array}{rcl} y_{i+2} & = & (1+\triangle) y_{i+1} = (1+\triangle)^2 y_i \\ y_{i+3} & = & (1+\triangle)^3 y_i \\ \cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{i+n} & = & (1+\triangle)^n y_i \end{array}$$

bağıntıları bulunur. Newton Binom formülünü kullanırsak

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \triangle y_i + C_n^2 \triangle^2 y_i + C_n^3 \triangle^3 y_i + \cdots + \triangle^n y_i$$

Aksine

$$\begin{array}{rcl} \triangle^n y_{i+n} = [(1+\triangle)-1]^n y_i & = & (1+\triangle)^n y_i - C_n^1 (1+\triangle)^{n-1} y_i + C_n^2 (1+\triangle)^{n-2} y_i + \cdots + (-1)^n y_i \\ & = & y_{i+n} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} + \cdots + (-1)^n y_i \end{array}$$

de yazılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned}\triangle^2 y_i &= y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i \\ \triangle^3 y_i &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + y_{i+1} - y_i\end{aligned}$$

Muhtelif mertebeden sonlu farkları yatay veya köşegen biçimli fark tabloları yardımı ile basitçe hesaplanabilir.

Örnek1: $x_0 = 0$ dan başlayarak $h = 1$ adımı ile $y = 2x^2 - 2x^2 + 3x - 1$ fonksiyonu için yatay tablo türetiniz.

Çözüm: Tablo 1 (3. Dereceden fonksiyon için yatay fark tablosu)

$$x_0 = 1;\ x_1 = 2;\ x_2 = 3$$
$$y_0 = -1;\ y_1 = 2;\ y_2 = 13$$

Buradan

$$\begin{aligned}\triangle y_0 &= y_1 - y_0 = 3 \\ \triangle y_1 &= y_2 - y_1 = 11 \\ \triangle y_2 &= y_3 - y_2 = 8\end{aligned}$$

bulunur. Ele alınan polinom 3. dereceden olduğu için $\triangle^3 y_i = 2.3! = 12$ olacaktır. Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığına dikkat edelim.

$$\begin{aligned}\triangle^2 y_{i+1} &= \triangle^2 y_i + 12 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots) \\ \triangle y_{i+1} &= y_i + \triangle^2 y_i \quad (i = 1, 2, \cdots) \\ y_{i+1} &= y_i + \triangle y_i \quad (i = 2, 3, \cdots)\end{aligned}$$

Bu formülleri kullanırsak düz çizgilerin altındaki elemanları hesaplayabiliriz. (Bkz. Tablo 1)

$x = x_n$ de y nin y_n değerinin ε hata ile bulunduğunu düşünelim. Bu hata sonlu farkların değerini nasıl etkiler? Bu soruya cevaplayabilmek için köşegen biçimli fark tablosunu türetelim (Bkz. Tablo 1)

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$
0	-1	3	$\underline{8}$	12
1	2	$\underline{11}$	20	12
$\underline{2}$	$\underline{13}$	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12
...	...	...	...	...

Tablo 19: Tablo 16

Tablo 20: Tablo 17

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$	$\triangle^4 y$
x_{n-4}	y_{n-4}				
x_{n-3}	y_{n-3}	$\triangle y_{n-4}$			
x_{n-2}	y_{n-2}	$\triangle y_{n-3}$	$\triangle^2 y_{n-4}$		
x_{n-1}	y_{n-1}	$\triangle y_{n-2}$	$\triangle^2 y_{n-3}$	$\triangle^3 y_{n-4}$	
x_n	y_n	$\triangle y_{n-1} + \varepsilon$	$\triangle^2 y_{n-2} + \varepsilon$	$\triangle^3 y_{n-3} + \varepsilon$	$\triangle^4 y_{n-4} + \varepsilon$
x_{n+1}	y_{n+1}	$\triangle y_n - \varepsilon$	$\triangle^2 y_{n-1} - 2\varepsilon$	$\triangle^3 y_{n-2} - 3\varepsilon$	$\triangle^4 y_{n-3} - 4\varepsilon$
x_{n+2}	y_{n+2}	$\triangle y_{n+1}$	$\triangle^2 y_n + \varepsilon$	$\triangle^3 y_{n-1} + 3\varepsilon$	$\triangle^4 y_{n-2} + 6\varepsilon$
x_{n+3}	y_{n+3}	$\triangle y_{n+2}$	$\triangle^2 y_{n+1}$	$\triangle^3 y_n + \varepsilon$	$\triangle^4 y_{n-1} - 4\varepsilon$
x_{n+4}	y_{n+4}	$\triangle y_{n+3}$	$\triangle^2 y_{n+2}$	$\triangle^3 y_{n+1}$	$\triangle^4 y_n + \varepsilon$

Tablo 2 den üç sonucu hemen söyleyelim

1. Eğer y_n hatalı olarak verilmiş ise

$$\triangle y_{n-1}; \triangle y_n; \triangle^2 y_{n-2}; \triangle^2 y_{n-1}; \triangle^3 y_n \text{ ve } b$$

sonlu farklar da hatalı olarak hesaplanacaktır.

2. $D^k y_n$ sonlu farkının ifadesine hata oluşumları işaretini değişen binominal katsayılarla katkı sağlayacaktır. Yani toplam hata oluşumuna katkı gösteren hata oluşumlar,

$$C_k^0\varepsilon,\ -C_k^1\varepsilon,\ C_k^2\varepsilon,\ \cdots,\ (-1)^k C_k^k\varepsilon$$

olacaktır. Bu toplam hatanın mutlak değerinin hızla artacağını gösteriyor.

3. Her sonlu $D^k y_n$ farkı için hataların toplamı sıfıra, mutlak değerinin toplamı ise $2^{k|\varepsilon|}$ na eşittir.

Genelleştirilmiş Derece Kavramı

x sayısının n dereceden genelleştirilmiş derecesi h belirli bir sabit olmak üzere

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-1)h] \tag{74}$$

ifadesine denir. $x^{[0]} = 1$ kabul ediliyor. $h = 0$ olduğu taktirde

$$x^{[n]} = x^n$$

oluyor. Sonlu farkları hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\triangle x^{[n]} &= (x+h)^{[n]} - x^{[n]} \\
&= (x+h)x(x-h)\cdots[x-(n-2)h] - x(x-h)\cdots[x-(n-1)h] \\
&= x(x-h)\cdots[x-(n-2)h][(x+h)-(x-(n-1)h)] \\
&= x(x-1)\cdots[x-(n-2)h]nh = nhx^{[n-1]}
\end{aligned} \tag{75}$$

Yani $\triangle x^{[n]} = nhx^{[n-1]}$. Bu formülü kullanarak 2. mertebeden sonlu farkı bulalım

$$\triangle^2 x^{[n]} = \triangle\left(\triangle x^{[n]}\right) = \triangle\left(nhx^{[n-1]}\right) = nh\Delta x^{[n-1]} = nh.(n-1)hx^{[n-2]} = n(n-1)h^2x^{[n-2]}$$

Matematiksel rekürans metodu ile

$$\triangle^k x^{[n]} = n(n-1)\cdots[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]}$$

formülü bulunabilir. Burada $k = 1, 2, \cdots, n$ dir. $k > n$ durumunda $\triangle^k x^{[n]} = 0$ olacağı açıktır. (2) formülünün bulunarak Newton Leibnitz formülünün benzerini türetelim. $x_0, x_1, \cdots, x_n$ eşit adımlı noktalar olsun. Yani $x_{i+1} - x_i = h = sbt$ dir. $i = 0, 1, 2, \cdots$ dir.

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]}$$

toplamını ele alalım. (2) formülüne göre

$$x^{[n]} = \frac{\Delta x^{n+1}}{h(n+1)}$$

olduğu için

$$\begin{aligned}
S_N = \frac{1}{h(n+1)}\sum_{i=0}^{N-1}\triangle x_i^{[n+1]} &= \frac{1}{h(n+1)}\left\{x_1^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} + x_2^{[n+1]} - x_1^{[n+1]} + \cdots + x_N^{[n+1]} - x_{N-1}^{[n+1]}\right\} \\
&= \frac{1}{h(n+1)}\left\{x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}\right\}
\end{aligned}$$

olacaktır. Neticede

$$\sum_{i=0}^{N-1}\triangle x_i^{[n]} = \frac{x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}}{h(n+1)} \tag{76}$$

formülü bulunacaktır. Bu formül tam pozitif genelleştirilmiş derecelerin toplam formülü olup Newton-Leibnitz formülüne benzemektedir.

Enterpolasyon Probleminin Konumu

$[a, b]$ aralığında $n+1$ tane $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ noktalarının verildiğini düşünelim. Bu noktalar düğün noktaları olarak adlandırılmaktadır. Bu noktaların yanı sıra bu noktalarda belli bir $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n \tag{77}$$

değerlerinin verildiğini düşünelim belirli sınıfa mensup ve

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \cdots, F(x_n) = y_n \tag{78}$$

özelliğine sahip $F(x)$ fonksiyonunun bulunması gerekmektedir. Bu fonksiyona ileride interpolasyon polinomu denilecektir.

Geometrik olarak $F(x)$ fonksiyonunun bulunması $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere $M_i(x_i, y_i)$ noktalar sisteminden geçen $y = F(x)$ eğrisinin bulunmasına denktir. (Bkz. Şek.1)

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \cdots, P_n(x_n) = y_n$$

özellikli n. dereceden $P_n(x)$ polinomunun bulunması gerekseydi bu problemi çözümü tek olacaktı. Böylece bulunacaktır $y = F(x)$ biçimli interpolasyon formülü yardımı ile $y = f(x)$ fonksiyonunun, interpolasyon düğüm noktalarından farklı x noktasında değeri hesaplanabilir. Bu işleme $f(x)$ fonksiyonunun interpolasyon yapılması denir. Eğer $x \in [x_0, x_n]$ ise bu noktada fonksiyonun değerinin bulunması problemine interpolasyon problemi denir. Eğer $x \notin [x_0, x_n]$ ise bu noktada fonksiyonun değerinin bulunması problemine ekstrapolasyon problemi denir.

Newton 1.İnterpolasyon Formülü

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ noktaları eşit aralıklı noktalar olsun. Yani $x_i = x_0 + ih$ dır.Burada $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ dir. Bu noktalarda $y = f(x)$ fonksiyonunun değerleri $y_i = f(x_i)$ olsun

Derecesi n'i aşmayan

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{79}$$

Özellikli $P_n(x)$ polinomununu bulmak gerekir. (1) şartı

$$\triangle^m P_n(x_0) = \triangle^m y_0 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

bağıntılarının sağlanmasına denktir. Bu polinomu aşağıdaki şekilde bulalım

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Genelleştirilmiş dereceleri kullanırsak (2) eşitliğini

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[3]} + \cdots + a_n(x - x_0)^{[n]} \tag{80}$$

şekline dönüştürelim. $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere a_i katsayılarının bulunması gerekmektedir. (2') formülünde $x = x_0$ kabul edilirsek

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0$$

elde edilecektir. a_1 'i bulmak için 1. sonlu farkı türetelim

$$\triangle P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + \cdots + na_n(x - x_0)^{[n-1]} h$$

$x = x_0$ kabul edersek $\triangle P_n(x) = \triangle y_0 = a_1 h$ elde ederiz. Buradan

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{1! h}$$

buluruz. a_2 katsayısını bulabilmek için 2. mertebeden sonlu farkı türetelim.

$$\triangle^2 P_n(x) = 2! h^2 a_2 + 2.3 h^2 a_3 (x - x_0)^{[1]} h + \cdots + (n-1) n h^2 a_n (x - x_0)^{[n-2]}$$

$x = x_0$ kabul edersek $\triangle^2 P_n(x) = \triangle^2 y_0 = 2! h^2 a_2$ buluruz. Buradan

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}$$

elde edilecektir. Bu işlemi benzer şekilde tekrarlarsak

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

buluruz. Burada $0! = 1$ ve $\triangle^0 y = y$ kabul dilmektedir. Bulunan ifadeleri (2.13) formülünde yerine yazarsak

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h}(x - x_0)^{[2]} + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]}$$

Bu formüle Newtonun 1.interpolasyon formülü denir. Göründüğü gibi $P_n(x)$ polinomu n. derecelidir ve $P_n(x_0) = y_0$

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots \\ &\quad + \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x_k - x_0)(x_k - \boldsymbol{x}_1)\cdots(x_k - x_{k-1}) \\ &= y_0 + k \triangle y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \triangle^2 y_0 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1}{k!} \triangle^k y_0 \\ &= (1 + \triangle)^k y_0 = y_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

sağlamaktadır. $h \to 0$ durumunda (3) formülü y fonksiyonu için Taylor polinomuna dönüşüyor. Gerçekten

$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta^k y_0}{h^k} = \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)_{x = x_0} = y^{(k)}(x_0)$$

dir. Öte yandan da

$$\lim_{h \to 0} (x - x_0)^{[n]} = (x - x_0)^n$$

olacaktır. Burada (3) formülü $h \to 0$ durumunda

$$P_n(x_k) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^n$$

biçiminde Taylor formülüne dönüşüyor. Newton interpolasyon formülünün kullanımında pratikliği sağlamak için bu formülü biraz değişik yazıyorlar.

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

olsun. Bu takdirde

$$\frac{(x - x_0)^{[n]}}{h^i} = \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_0 - h}{h} \cdots \frac{x - x_0 - (i-1)h}{h} = q(q-1)\cdots(q - i + 1)$$

burada $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Bu ifadeyi (3) formülünde yazalım. Bu taktirde

$$P_n(x_k) = y(x_0) + q \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \triangle^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \tag{81}$$

elde edilecektir. Newton 1.interpolasyon formülünün son şekli (4) formülüdür. (4) formülünü $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 başlangıç değerinin komşuluğundaki x lerde hesaplarken uygulamak gerekmektedir. (Bu durumda $|q|$ küçük olacaktır.) Eğer (4) formülünde $n = 1$ kabul edersek

$$P_1(x) = y_0 + q \triangle y_0$$

bulunacaktır. Bu bir lineer interpolasyondur. $n = 2$ durumunda kuadratik interpolasyon ortaya çıkacaktır.

$$P_2(x) = y_0 + q \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \triangle^2 y_0$$

Bu interpolasyon formülü uygulanırken yatay fark tablosunun kullanılması gerekiyor.

Newton'un 2. İnterpolasyon Formülü

$\{x_i\}$ düğüm noktaları $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ formülü ile türetilmiş olsun. Burada h=sabit dir.ve adımı ifade etmektedir. $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere $x = x_i$ de fonksiyonun y_i değerlerinin bilindiğini varsayalım. Fonksiyonun değerinin bulunması gereken x apsisi x_n sağ ucuna yakın olduğunda 1.interpolasyon formülünü uygulanması hassas sonuç vermiyor. Bu durumda Newton'un 2. intepolasyon formülü uygulanacaktır. Bu polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

şeklinde bulalım. Genelleştirilmiş dereceleri kullanırsak

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_n)^{[2]} + \cdots + a_n(x - x_n)^{[n]} \tag{82}$$

elde ederiz. Bilinmeyen $a_0, a_1, \cdots, a_n$ katsayıları $P_n(x_i) = y_i$ olacak şekilde bulunacaktır. $P_n(x_n) = y_n = a_0$ bulunacaktır. Yinede (1) den

$$\triangle P_n(x) = a_1 h + 2ha_2(x - x_{n-1})^{[1]} + \cdots + nha_n(x - x_1)^{[n-1]}$$

yazılabilir olduğu için

$$\triangle P_n(x_{n-1}) = a_1 h \text{ veya } a_1 = \frac{\Delta P_0(x_{n-1})}{1!h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}$$

bulunacaktır. Nihayet (1) den sonuçta

$$a_i = \frac{\Delta y_{n-i}}{1!h^i} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

bulunacaktır. Böylece

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_n &+ \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta y_{n-1}}{2!h}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ &+ \frac{\Delta y_{n-1}}{n!h}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0) \end{aligned} \tag{83}$$

şeklinde Newton 2. interpolasyon formülü türetilmiş oldu.

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

olsun. Bu taktirde

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1, \quad \frac{x - x_{n-2}}{h} = q + 2$$

ve b. olacaktır. (4) de bu formülleri kullanırsak

$$P_n(x) = y_n + q \triangle y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \triangle^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1) \cdots (q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0 \tag{84}$$

elde edilecektir.

Merkezi Fark Tablosu

Newton interpolasyon formüllerini kullanabilmek için fonksiyonun değerinin $\{x_i\}_{i=0}^n$ düğüm noktalarının uçlarına yakın noktalarda hesaplanması istenmesi gerekmektedir. x ara noktası x_0 ve x_n uç noktalarından uzak nokta olunca fonksiyonun bu x noktasında değerini hesaplamak için Newton formülleri değil merkezi fark formülleri uygulanacaktır. Bu formüllere örnek olarak Gauss, Stirling ve Bessel formüllerini göstermekle olur.

Tablo 21: Tablo 18

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$	$\triangle^4 y$	$\triangle^5 y$	$\triangle^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		$\triangle y_{-4}$					
x_{-3}	y_{-3}		$\triangle^2 y_{-4}$				
		$\triangle y_{-3}$		$\triangle^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\triangle^2 y_{-3}$		$\triangle^4 y_{-4}$		
		$\triangle y_{-2}$		$\triangle^3 y_{-3}$		$\triangle^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\triangle^2 y_{-2}$		$\triangle^4 y_{-3}$		$\triangle^6 y_{-4}$
		$\triangle y_{-1}$		$\triangle^3 y_{-2}$		$\triangle^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\triangle^2 y_{-1}$		$\triangle^4 y_{-2}$		$\triangle^6 y_{-3}$
		$\triangle y_0$		$\triangle^3 y_{-1}$		$\triangle^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\triangle^2 y_0$		$\triangle^4 y_{-1}$		$\triangle^6 y_{-2}$
		$\triangle y_1$		$\triangle^3 y_0$		$\triangle^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\triangle^2 y_1$		$\triangle^4 y_0$		
		$\triangle y_2$		$\triangle^3 y_1$			
x_3	y_3		$\triangle^2 y_2$				
		$\triangle y_3$					
x_4	y_4						

Gauss İnterpolasyon Formülü

$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ eşit aralıklı düğüm noktaları olsun. Burada $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i = h = sbt$ dir. Burada $(i = -n, -(n-1), \cdots, n-1)$ dır. $y = f(x)$ fonksiyonunun bu düğüm noktalarda $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, \pm 1, \cdots, \pm n)$ değerleri belli olsun.

Derecesi $2n$'i aşmayan ve $P(x_i) = y_i$ $(i = 0, \pm 1, \cdots, \pm n)$ özelliğine sahip $P(x)$ polinomunun türetilmesini gerekmektedir. $P(x_i) = y_i$ şartından tüm i ve k lar için

$$\triangle^k P(x_0) = \triangle^k y_i \tag{85}$$

bağıntısının sağlanacağı sonucu elde ediliyor. $P(x)$ polinomunu

$$\begin{aligned} P(x) \quad = \quad & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_{-1})(x - x_1)(x - x_2) \\ & + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + a_5(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ & + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)}) \cdots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ & + a_{2n}(x - x_{-(n-1)}) \cdots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned} \tag{86}$$

şeklinde bulalım. Genelleştirilmiş dereceleri kullanırsak (2) eşitliğini

$$\begin{aligned} P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} + a_4(x - x_{-1})^{[4]} \\ + \cdots + a_{2n-1}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{[2n-1]} + a_{2n}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{[2n]} \end{aligned} \tag{87}$$

elde edilecektir. Newton interpolasyon polinomunun katsayılarının bulunması işlemini tekrarlarsak, (1) formülünü kullanarak

$$a_0 = y_0, a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}, a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}, a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3}, a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-1}}{4!h^4}, \cdots, a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}}, a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}$$

bulabiliriz. Daha sonra

$$q = \frac{y - y_0}{h}$$

kabul ederek ve (3) formülünden

$$\begin{aligned} P(x) \quad = \quad & y_0 + q \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \triangle^3 y_{-1} \\ & + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \triangle^4 y_{-2} + \frac{(q+1)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!} \triangle^5 y_{-2} + \cdots \\ & + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

şeklinde Gauss'un 1. interpolasyon formülünü bulabiliriz (4) formülü.

$$\begin{aligned} P(x) \quad = \quad & y_0 + q \triangle y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!} \triangle^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!} \triangle^4 y_{-2} \\ & + \cdots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada $x = x_0 + qh$ ve $q^{[m]} = q(q-1)\cdots[q-(m-1)]$ dır.

Gauss 1. interpolasyon formülü

$$\triangle y_0, \triangle^2 y_{-1}, \triangle^3 y_{-1}, \triangle^4 y_{-2}, \triangle^5 y_{-2}, \triangle^6 y_{-3}, \cdots$$

katsayılarını içermektedir. (Bkz tablo. Gösterilen katsayılar bu tabloda okun yönünde alt kırık satırı oluşturan katsayılar olmaktadır.) benzer şekilde

$$\triangle y_{-1}, \triangle^2 y_{-1}, \triangle^3 y_{-2}, \triangle^4 y_{-2}, \triangle^5 y_{-3}, \triangle^6 y_{-3}, \cdots$$

merkezi farkları içerecek şekilde Gauss 2. interpolasyon formülü türetilebilinir. (Bu katsayılar tablo da ok yönünde üst kırır satırı oluşturan katsayılardır.)

Gauss 2. interpolasyon formülü

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + q \triangle y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \triangle^3 y_{-2} \\ &+ \frac{(q+1)(q+1)q(q-1)}{4!} \triangle^4 y_{-2} + \cdots + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-n} \\ &+ \frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned} \tag{88}$$

şekline sahiptir. Yine q= $\frac{x-x_0}{h}$ ötelemesi kabul edersek (5) formülü.

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + q \triangle y_{-1} + \frac{(q+1)^{[2]}}{2!} \triangle^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!} \triangle^3 y_{-2} + \frac{(q+2)^{[4]}}{4!} \triangle^4 y_{-2} \\ &+ \cdots + \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \triangle^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)^{[2n]}}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned} \tag{89}$$

şekline dönüşecektir.

Stirling İnterpolasyon Formülü

1. ve 2. Gauss interpolasyon formüllerinin aritmetik ortasını ele alırsak, sonuçta Stirling formülünü aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \triangle^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} . \frac{\Delta^2 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} \\ &+ \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!} \triangle^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1^2)^2(q^2-2^2)}{5!} . \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} \\ &+ \frac{q^2(q^2-1^2)^2(q^2-2^2)}{6!} . \triangle^6 y_{-3} + \cdots \\ &+ \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} . \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \\ &+ \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned} \tag{90}$$

Burada $q = \frac{x-x_0}{h}$ dir. $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n$ değerleri için $P(x_i) = y_i$ olacağı açıktır.

Bessel İnterpolasyon Formülü

2. Gauss interpolasyon formülü kullanılarak Bessel interpolasyon formülü türetilebilir. $(2n+2)$ tane eşit aralıklı (h adımlı)

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \cdots, x_0, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$$

düğüm noktalarını ve bu noktalara tekabül eden ve bilinen

$$y_{-n}, y_{-(n-1)}, \cdots, y_0, \cdots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$$

değerlerini ele alalım. Eğer başlangıç veriler olmak üzere $x = x_0$ ve $y = y_0$ değerlerini seçersek, bu takdirde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n$ olmak üzere ama a_{1+k} düğüm noktalarını kullanalım. Bu taktirde $\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = q-1$ olacaktır, (1) formülünün sağ tarafındaki indisler ise bir birim artacaktır. (1) formülünü sağ tarafında q yerine $q-1$ yazarak ve indisleri de bir birim büyüterek aşağıdaki şekilde bir yardımcı interpolasyon formülü elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} P(x) = {} & y_1 + (q-1) \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \triangle^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} . \triangle^3 y_{-1} \\ & + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \triangle^4 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{5!} . \triangle^5 y_{-2} \\ & + \cdots + \frac{(q+n-2)\cdots(q-n)}{(2n-1)!} . \triangle^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{2n!} \triangle^{2n} y_{-(n-1)} \end{aligned} \tag{91}$$

(1) ve (2) formüllerinin aritmetik ortalamasını bulursak

$$\begin{aligned} P(x) = {} & \frac{y_0+y_1}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2} . \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)}{3!} . \triangle^3 y_{-1} \\ & + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} . \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)(q+2)}{5!} . \triangle^5 y_{-2} \\ & + \frac{q(q-1)(q+1)(q+2)(q-3)}{6!} . \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots \\ & + \frac{q(q-1)(q+1)\cdots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!} . \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} \\ & + \frac{(q+\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)\cdots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} . \triangle^{2n} y_{-n} \end{aligned} \tag{92}$$

şeklinde Bessel interpolasyon formülü türetilmiş olacaktır. Burada

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

dır. $n = 1$ durumunda $\triangle^3 y_{-1}$ ihmal ederek Bessel e göre kuadratik interpolasyon formülünü aşagıdaki şekilde türetebiliriz.

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1 + \Delta y_0}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \triangle y_0 + \frac{q(q-1)}{2} . \frac{\Delta y_0 - \Delta y_{-1} + \Delta y_1 - \Delta y_0}{2}$$

veya

$$P(x) = y_0 + q \triangle y_0 + q_1 . (\triangle y_1 - \triangle y_{-2}) \tag{93}$$

burada $q_1 = \frac{q(1-q)}{4}$ dür.

Bessel formülünde tek mertebeden farkları içeren terimler $\left(q - \frac{1}{2}\right)$ şeklinde çarpana sahiptirler. Bu nedenle $q = \frac{1}{2}$ durumunda (3) formülü çok basit bir şekilde düşünecektir. Yani

$$\begin{aligned} P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = {} & \frac{y_0+y_1}{2} + \frac{1}{8} . \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128} . \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} - \frac{5}{1024} . \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} \\ & + \cdots + (-1)^n \frac{[1.3.5\cdots(2n-1)]^2}{2^{2n}(2n)!} . \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} \end{aligned}$$

olacaktır. Bu bir özel durumdur. Orta noktaya göre bir interpolasyon formülüdür. Eğer (3) Bessel formülünde $q - \frac{1}{2} = p$ ötelemesi kabul edersek, daha

simetrik şekilde interpolasyon formülü türetilebilir.

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & \frac{y_0+y_1}{2} + p \triangle y_0 + \frac{p^2-\frac{1}{4}}{2!}.\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} + \frac{p(p^2-\frac{1}{4})}{3!}.\triangle^3 y_{-1} \\
& + \frac{(p^2-\frac{1}{4})(p^2-\frac{9}{4})}{4!}.\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{p(p^2-\frac{1}{4})(p^2-\frac{9}{4})}{5!}.\triangle^5 y_{-2} \\
& + \frac{(p^2-\frac{1}{4})(p^2-\frac{9}{4})(p^2-\frac{25}{4})}{6!}.\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots \\
& + \frac{(p^2-\frac{1}{4})(p^2-\frac{9}{4})\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n)!}.\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} \\
& + \frac{p(p^2-\frac{1}{4})(p^2-\frac{9}{4})\cdots\left[p^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]}{(2n+1)!}.\triangle^{2n+1} y_{-n+1}
\end{aligned}
\tag{94}
$$

Burada $p = \frac{1}{h}\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right)$ dir.

Eşit Adımlı İnterpolasyon Formüllerinin Genelleştirilmiş Niteliği

Bu nitelikler aşağıdaki gibidir.

Newton interpolasyon formülü türetilirken 1. veya sonuncu interpolasyon düğüm noktası seçilir. Merkezi interpolasyon formülü türetildiğinde ise başlangıç nokta olarak ara düğüm noktası seçiliyor aşağıdaki Tablo 4 de interpolasyon formüllerinde kullanılacak farklar gösterilmiştir. İnterpolasyon formüllerinin daha detaylı incelenmesi sonucunda aşağıdakiler önerilebilir. $|q| < 0.25$ durumunda Stirling formülü, $0.25 \leq q \leq 0.75$ durumunda Bessel formülü kullanmak gerekmektedir. Newton formülleri ise interpolasyon yapılan noktanın tabloda başlangıç veya son noktaya yakın olduğunda uygulanması öngörülüyor.

Tablo 22: Tablo 19

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$	$\triangle^4 y$	
x_{-2}	y_{-2}		$\triangle^2 y_{-3}$		$\triangle^4 y_{-4}$	2. Newton Formülü
		$\triangle y_{-2}$		$\triangle^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\triangle^2 y_{-2}$		$\triangle^4 y_{-3}$	
		$\triangle y_{-1}$		$\triangle^3 y_{-2}$		
x_0	y_0		$\triangle^2 y_{-1}$		$\triangle^4 y_{-2}$	Stirling Formülü
		$\triangle y_0$		$\triangle^3 y_{-1}$		
x_1	y_1		$\triangle^2 y_0$		$\triangle^4 y_{-1}$	Bessel Fomülü
		$\triangle y_1$		$\triangle^3 y_0$		
x_2	y_2		$\triangle^2 y_1$		$\triangle^4 y_0$	
		$\triangle y_2$		$\triangle^3 y_1$		
x_3	y_3		$\triangle^2 y_2$		$\triangle^4 y_1$	1.Newton Formülü

Örnek1:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2} ds$$

Gauss hata fonksiyonunun değerleri Tablo (23) de verilmiştir. $erf(0.5437)$ in değerini hesaplayınız.

$y = erf(x)$ fonksiyonu için fark tablosu ve sonlu farkları yanda verilmiştir.

Tablo 23: $erf(x)$ fonksiyonunun fark tablosu

x	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$
0.51	0.5292437			
		86550		
0.52	0.5378987		−896	
		85654		−7
0.53	0.5464641		−903	
		84751		−7
0.54	0.5549392		−910	
		83841		−7
0.55	0.5633233		−917	
		82924		−6
0.56	0.5716157		−923	
		82001		
0.57	0.5798158			

$x_0 = 0.54$ ve $x = 0.5437$ kabul edelim. Bu taktirde

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.5437 - 0.54}{0.01} = 0.37$$

olacaktır.

$$\frac{1}{4} < q < \frac{3}{4}$$

olduğu için Bessel formülü uygulanacaktır. (94) formülünü uygulanabilmek için

$$p = q - \frac{1}{2} = 0.37 - 0.50 = -0.13$$

kabul edelim. Altı çizgili farkları kullanarak $erf(0.5437)$ değerini aşağıdaki gibi buluruz.

$$\begin{aligned} erf(0.5437) &= \frac{0.5549392 + 0.5633233}{2} + (-0.13).0.0083841 \\ &+ \frac{0.0169 - 0.25}{2}.\frac{-0.0000910 - 0.0000917}{2} \\ &+ \frac{-0.13(0.0169 - 0.25)}{6}.(-0.0000007) \\ &= 0.55913125 - 0.00108993 + 0.00001065 = 0.5580520 \end{aligned} \tag{95}$$

Örnek2:

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha . \sin^2 x}}$$

eliptik integralin değerleri ve fark tablosu Tablo (24) da verilmiştir. $K(78°30')$ değerini bulunuz.

Tablo 24: $K(\alpha)$ fonksiyonunun Fark Tablosu

α	$K(\alpha)$	$\triangle K$	$\triangle^2 K$	$\triangle^3 K$	$\triangle^4 K$	$\triangle^5 K$	$\triangle^6 K$
75°	2.76809						
		6461					
76°	2.83267		528				
		6989		84			
77°	2.90256		612		19		
		7601		103		13	
78°	2.97857		715		32		−5
		8316		135		8	
79°	3.06173		850		40		18
		9166		175		26	
80°	3.15339		1025		66		−1
		10191		241		25	
81°	3.25530		1266		91		43
		11457		332		68	
82°	3.36987		1598		159		
		13055		491			
83°	3.50042		2089				
		15144					
84°	3.65186						

Çözüm: $x_0 = 78°$; $h = 1°$; $x = 78°30'$ kabul ederek $q = 0.5$ değerini buluruz. Orta nokta için Bessel interpolasyon formülünü kullanalım ve 5. mertebeye kadar farklarla yetinelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} K(78°30') &= 2.97857 + 0.5.8316.10^{-5} - 0.125.\frac{715 - 850}{2}.10^{-5} + 0.023437.\frac{32 + 40}{2}.10^{-5} \\ &= 2.97857 - 0.04158 - 0.000978 + 0.000008 = 3.09180 \end{aligned}$$

değerleri bulunacaktır. Kıyaslama yapılması için aynı değerleri tahmini olarak Stirling formülüyle bulalım

$$\begin{aligned} K\left(78°30'\right) &= 2.97857 + 0.5.\frac{7601 + 8316}{2}.10^{-5} + 0.125.715.10^{-5} - 0.0625.\frac{103 + 135}{2}.10^{-5} \\ &- 0.0078.32.10^{-5} + 0.0117.\frac{13 + 8}{2}.10^{-5} \\ &= 2.97857 + 0.039792 + 0.000894 - 0.000074 - 0.000002 + 0.000001 \\ &= 3.019181 \end{aligned}$$

Sayısal Türev

$f(x)$ fonksiyon tablo ile verildiğinde veya x ve $f(x)$ arasındaki fonksiyonel bağıntı yeterli kadar karma ise, bu taktirde sayısal türev bulma önemli olmaktadır. 1.durumda diferensiyel hesap formülleri sadece geçerli değildir. 2.durumda ise bu metodların uygulaması yeterince zor işlemler gerektirir. Bu durumlarda $f(x)$ fonksiyonu yerine $j(x)$ interpolasyon fonksiyonu kullanılır ve $f(x)$ in türevinin değeri $j(x)$ in türevinin değerine tahmini olarak eşit kabul edilir. Tabii ki belli hata oluşumunda söz konusu oluyor. $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = j(x) + R(x) \tag{96}$$

Şeklinde ele alınabilir. Burada $j(x)$ interpolasyon fonksiyonu, $R(x)$ ise bu formülün kalan terimidir. Bu eşitliği k defa diferensiyellersek (türevlerin mevcut olduğu varsayılmaktadır)

$$f^{(k)}(x) = j^{(k)}(x) + R^{(k)}(x) \tag{97}$$

elde edilecektir. $f(x)$ fonksiyonu yerine $j(x)$ interpolasyon fonksiyonu ele alındığında ortaya çıkan $R(x)$ kalan teriminin sonsuz küçük olduğu varsayılır. Fakat bu $R^{(k)}(x)$ in de sonsuz küçük olacağı anlamına gelmez.

Bir örneğe bakalım

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

olsun. Burada $x(t) \in C^{'}[a,b]$ olsun. Bu taktirde $y(t) \in C[a,b]$ olacaktır. Bu uzayların her birinde iki fonksiyon arasındaki uzaklığı (normu)

$$\rho(x(t), \tilde{x}(t)) = \max_{[a,b]} |x(t) - \tilde{x}(t)|$$

şeklinde tanımlayalım. C' uzayında

$$x(t) \text{ ve } \tilde{x}(t) = x(t) + \frac{1}{n}\sin\left(n^2(x-a)\right)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonlar arasındaki uzaklık. Yani

$$\rho(x(t), \tilde{x}(t)) = \max_{[a,b]} \left|\frac{1}{n}\sin^2 n(x-a)\right| = \frac{1}{n}$$

büyüklüğü büyük n ler için yeterince küçük yapılabilir. Fakat

$$\tilde{y}(t) = \frac{d}{dt}\left[x(t) + \frac{1}{n}\sin^2 n(x-a)\right] = y(t) + n.\cos^2 n(x-a)$$

olduğu için

$$\rho(y(t), \tilde{y}(t)) = \max_{[a,b]} \left|n.\cos^2(x-a)\right| = n$$

olacaktır. Dolayısıyla C' uzayında ele alalım bir-birine yakın *x(t)* ve $\tilde{x}(t)$ fonksiyonları verildiğinde, onların türevleri arasındaki uzaklığın küçük olacağı söylenemez. Tam tersi: istenilen büyük sayıdan büyük yapılabilir. Bu nedenle C sınıfında diferensiyelleme problemi kararlı değildir denir.

Taylor Seri Açılımlarını Kullanarak Sonlu Fark Yaklaşımları

$f(x)$ fonksiyonun türevlerinin sonlu fark yaklaşımlarıyla türetilmesi x civarında $f(x)$ in ileri ve geri taylor seri açılımlarından yararlanarak yapılır. Bu açılımları aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{98}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{99}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) \tag{100}$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) \tag{101}$$

bu serileri alt alta toplayıp çıkarırsak aşağıdaki serileri elde ederiz;

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{102}$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \cdots \tag{103}$$

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x) + \cdots \tag{104}$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3}f'''(x) + \cdots \tag{105}$$

iki serinin toplamlarında sadece çift mertebeli türevler içerirken farklarda ise sadece tek mertebeli türevler içermektedir. Denklem (98)-(105) ifadelerini $f(x)$ in değişik türevlerini bulmak için kullanabiliriz.

Merkezi Fark Türev Yaklaşımları

Denklem (103) de $f'(x)$ yanlız bırakılırsa

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(x) - \cdots$$

bulunur. Denklemin sadece ilk terim alınırsa,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \tag{106}$$

$f'(x)$ için merkezi fark türev yaklaşımını elde ederiz.

Denklem (102) de $f''(x)$ yanlız bırakılırsa

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f'''(x) + \cdots$$

bulunur. Denklemin sadece ilk terim alınırsa,

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \tag{107}$$

$f''(x)$ için merkezi fark türev yaklaşımını elde ederiz.

Denklem (103) -2 ile çarpılıp denklem (105) ile toplanırsa ve gerekli düzenlemelerde yapılırsa $f'''(x)$;

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^2} + O(h^2) \tag{108}$$

bulunur.

Benzer tarzda, denklem (102) -4 ile çarpılıp, denklem (105) ile toplanırsa ve düzenlenirse $f^{(4)}$ türev formülü

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} + O(h^2) \tag{109}$$

bulunabilir. $O(h^2)$ hatası ile merkezi fark türev tablosunu aşağıdaki gibi

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2hf'(x)$		-1	0	1	
$h^2f''(x)$		1	-2	1	
$2h^3f'''(x)$	-1	2	0	-2	1
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

verebiliriz. Benzer tarzda $O(h^4)$ hatası ilede merkezi fark formüllerini bulabiliriz, işlemlerin uzun olasından dolayı sadece birtanesinin nasıl yaıpldığını verelim, diğerleri benzer tarzda yapılabilir.

Denklem (103) -8 ile çarpılıp denklem (105) ile toplanırsa ve gerekli düzenlemelerde yapılırsa $f'(x)$;

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + O(h^4) \quad (110)$$

	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$
$12hf'(x)$		1	-8	0	8	-1	
$12h^2f''(x)$		-1	16	-30	16	-1	
$8h^3f'''(x)$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6h^4f^{(4)}(x)$	1	12	-39	56	39	12	-1

dir.

Örnek: Yanda verilen $f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun değerlerinden yararlanarak $h = 0.01$ için $f'(0.5)$ in yaklaşık değerini Merkezi fark formülleriyle bulunuz. $f'(0.5) = -\sin(0.5) = -0.479426$ tam değeriyle bulduğunuz değeri karşılaştırın.

x_i	$\cos(x_i)$
0.45	0.900447
0.46	0.896052
0.47	0.891568
0.48	0.886995
0.49	0.882333
0.50	0.877583
0.51	0.872745
0.52	0.867819
0.53	0.862807
0.54	0.857709
0.55	0.852525

Tablo 25: $\cos(x)$ değerleri

Çözüm:

Önce $O(h^2)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

formülüne göre

$$\begin{aligned} f'(0.50) &\approx \frac{f(0.51) - f(0.49)}{2 \times 0.01} \\ &= \frac{0.872745 - 0.882333}{0.02} = -0.479418 \\ f'(0.5) &= -\sin(0.5) = -0.479426 \end{aligned}$$

bu durumda virğülden sonra dört basamak için sonuç doğru olmaktadır.

Şimdide $O(h^4)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

formülüne göre

$$\begin{aligned} f'(0.50) &\approx \frac{f(0.52) + 8 \times f(0.51) - 8 \times f(0.49) - f(0.48)}{12 \times 0.01} \\ &= \frac{-0.867819 + 8 \times 0.872745 - 8 \times 0.882333 + 0.886995}{0.12} = -0.4794 \\ f'(0.5) &= -\sin(0.5) = -0.479426 \end{aligned}$$

bulunur.

İleri Fark Türev Yaklaşımları

Merkezi sonlu fark yaklaşımları herzaman kullanılamaz. Örneğin n farklı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktaları için değerleri verile $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım, merkezi farklarda x in her iki tarafındaki değerlerini kullandığımızdan x_1 ve x_n noktalarında vede uçlara yakın diğer değerlerde fonksiyonun türevlerini bulamayız. Böyle bir durumlarda x in sadece bir tarafının değerlerine ihtiyaç duyarız. Bu tip durumlar için *ileri* ve *geri* fark yaklaşımları gerekecektir. Baştaki x değerleri için kullanabileceğimiz ileri fark yaklaşımlarının nasıl bulunduğunu birkaçı için gösterelim, sonrada tablo halinde türevlerin formüllerini ifade edelim.

Denklem (98) $f'(x)$ yanlız bırakılırsa ilk *ileri fark yalaşımını* buluruz

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(x) - \cdots$$

eşitliğin sağ tarafıdaki sadece ilk terimi alır diğerlerini ihmal edersek

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \tag{111}$$

bulunur. Bu formüller $O(h)$ hatsı ile bulunan formüllerdir, tabiiki $O(h^2)$ hatası ile bulunan merkezi fark yaklaşımlarından daha iyi değildir. Benzer tarzda ikinci türevi bulmak için, denklem (98) -2 ile çarpılıp, denklem (100) ile toplanıp düzenlenirse

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h) \tag{112}$$

bulunur. Diğer üçüncü ve dördüncü türevleri benzer tarzda bulabiliriz. Sonuçlar aşağıdaki toploda verilmiştir.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	Hata
$hf'(x)$	-1	1				$O(h)$
$h^2f''(x)$	1	-2	1	1		$O(h)$
$h^3f'''(x)$	-1	3	-3	1		$O(h)$
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1	$O(h)$

Daha iyi bir yaklaşım sağlamak için $O(h^2)$ hatası ile türev formüllerini bulalım, bunun için denklem (98) ve (100) kullanarak birinci türev elde edelim. Denklem (98)'i -4 ile çarpıp denklem (100) ile toplıyalım

$$f(x+2h) - 4f(x+h) = -3f(x) - 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3}f'''(x) + \cdots$$

daha sonra,

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} - \frac{h^2}{3}f'''(x) + \cdots$$

yada

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2) \tag{113}$$

elde edilir.

Benzer tarzda Taylor serileri açılımlarını kullanarak diğer türev ifadelerinin eşitlerinide bulabiliriz. Örneğin $f(x+h)$, $f(x+2h)$ ve $f(x+3h)$ Taylor açılımlarından $f''(x)$ i; $f(x+h)$, $f(x+2h)$, $f(x+3h)$ ve $f(x+4h)$ Taylor açılımlarından yararlanarak da $f'''(x)$, v.s buluruz. Aşağıdaki tabloda $O(h^2)$ hatası ile türev formülleri verilmiştir.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$	Hata
$2hf'(x)$	-3	4	-1				$O(h^2)$
$h^2f''(x)$	2	-5	4	-1			$O(h^2)$
$2h^3f'''(x)$	-5	18	-24	14	-3		$O(h^2)$
$h^4f^{(4)}(x)$	3	-14	26	-24	11	-2	$O(h^2)$

Örnek: Yanda verilen $f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun değerlerinden yararlanarak $h = 0.01$ için $f'(0.5)$ in yaklaşık değerini İleri fark formülleriyle bulunuz. $f'(0.5) = -\sin(0.5) = -0.479426$ tam değeriyle bulduğunuz değeri karşılaştırın.

Çözüm:

Önce $O(h)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x)}{h}$$

formülüne göre

$$\begin{aligned} f'(0.50) &\approx \frac{f(0.51) - f(0.50)}{0.01} \\ &= \frac{0.872745 - 0.877583}{0.01} = -0.483849 \\ f'(0.5) &= -\sin(0.5) = -0.479426 \end{aligned}$$

virgülden sonra tek basamak için sonuç doğrudur. Bu $O(h)$ hatası ile değerleri bulmamızdan kaynaklanmaktadır, zaten merkezi farktaki $O(h^2)$ hatasından daha iyi bir sonucun çıkması pek mümkün olamaz.

Şimdide $O(h^2)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}$$

formülüne göre

$$\begin{aligned} f'(0.50) &\approx \frac{-f(0.52) + 4 \times f(0.51) - 3 \times f(0.50)}{2 \times 0.01} \\ &= \frac{-0.867819 + 4 \times 0.872745 - 3 \times 0.877583}{0.02} = -0.479399 \\ f'(0.5) &= -\sin(0.5) = -0.479426 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerde merkezi fark formüllerinden daha iyi bir değer değildir.

x_i	$\cos(x_i)$
0.45	0.900447
0.46	0.896052
0.47	0.891568
0.48	0.886995
0.49	0.882333
0.50	0.877583
0.51	0.872745
0.52	0.867819
0.53	0.862807
0.54	0.857709
0.55	0.852525

Tablo 26: $\cos(x)$ değerleri

Geri Fark Türev Yaklaşımları

*İleri fark yalaşımın*daki benzer yaklaşımlar buradada geçerlidir. Geri fark türev yaklaşımlarıda x_n ve ona yakın değerlerin türevlerini bulmak için kullanılır. Denklem (99) de $f'(x)$ yanlız bırakılırsa

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \tag{114}$$

bulunur. Denklem (99) ve (101) dende

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} + O(h) \tag{115}$$

bulunur. Benzer işlemlerle diğer türev eşitlikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	Hata
$hf'(x)$				-1	1	$O(h)$
$h^2f''(x)$			1	-2	1	$O(h)$
$h^3f'''(x)$		-1	3	-3	1	$O(h)$
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1	$O(h)$

$O(h^2)$ hatasıyla fonksiyonların türev eşitliklerini bulmak istersek aşağıdaki tablodaki ifadeleri buluruz.

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	Hata
$2hf'(x)$				1	-4	3	$O(h^2)$
$h^2f''(x)$			-1	4	-5	2	$O(h^2)$
$2h^3f'''(x)$		3	-14	24	-18	5	$O(h^2)$
$h^4f^{(4)}(x)$	-2	11	-24	26	-14	3	$O(h^2)$

x_i	$\cos(x_i)$
0.45	0.900447
0.46	0.896052
0.47	0.891568
0.48	0.886995
0.49	0.882333
0.50	0.877583
0.51	0.872745
0.52	0.867819
0.53	0.862807
0.54	0.857709
0.55	0.852525

Tablo 27: $\cos(x)$ değerleri

Örnek: Yanda verilen $f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun değerlerinden yararlanarak $h = 0.01$ için $f'(0.5)$ in yaklaşık değerini Geri fark formülleriyle bulunuz. $f'(0.5) = -\sin(0.5) = -0.479426$ tam değeriyle bulduğunuz değeri karşılaştırın.

Çözüm:

Önce $O(h)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

formülüne göre

$$\begin{aligned} f'(0.50) &\approx \frac{f(0.50) - f(0.49)}{0.01} \\ &= \frac{0.877583 - 0.882333}{0.01} = -0.475000 \\ f'(0.5) &= -\sin(0.5) = -0.479426 \end{aligned}$$

bu değerde virgülden sonra iki basamak için sonuç doğrudur. Bu $O(h)$ hatası ile değerleri bulmamızdan kaynaklanmaktadır, zaten merkezi farktaki $O(h^2)$ hatasından daha iyi bir sonucun çıkması pek mümkün olamaz.

Şimdide $O(h^2)$ hatası ile fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$$

formülüne göre

$$\begin{aligned} f'(0.50) &\approx \frac{f(0.48) - 4 \times f(0.49) + 3 \times f(0.50)}{2 \times 0.01} \\ &= \frac{0.886995 - 4 \times 0.882333 + 3 \times 0.877583}{0.02} = -0.479400 \\ f'(0.5) &= -\sin(0.5) = -0.479426 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerde merkezi fark formüllerinden daha iyi bir değer değildir.

Kısmi Türevlerin Sayısal Hesaplanması Hakkında Kavram

Eğer $z = f(x, y)$ fonksiyon $x_i = x_0 + ih$, $y_i = y_0 + jk$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ dikdörtgensel şebekede verilmiş ise, bu taktirde $z = f(x, y)$ fonksiyonuna aşağıdaki

interpolasyon polinomu karşı getirilebilir.

$$
\begin{aligned}
z = z_{00} &+ \left[p\Delta^{1+0}z_{00} + q\Delta^{0+1}z_{00}\right] + \frac{1}{2!}\left[p(p-1)\Delta^{2+0}z_{00} + 2pq\Delta^{1+1}z_{00} + q(q-1)\Delta^{0+2}z_{00}\right] \\
&+ \frac{1}{3!}\left[p(p-1)(p-2)\Delta^{3+0}z_{00} + 3p(p-1)q\Delta^{2+1}z_{00} + 3pq(q-1)\Delta^{1+2}z_{00} + q(q-1)(q-2)\Delta^{0+3}z_{00}\right] \\
&+ \cdots
\end{aligned}
\tag{116}
$$

burada $p = \frac{x-x_0}{h}$, $q = \frac{y-y_0}{k}$, $\Delta^{m+n}z_{00} = \Delta^{m+n}_{x^m y^n} z(0,0)$ dır. (1) formülünden kolayca türevler bulunabilir.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{h}.\frac{\partial z}{\partial p} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{h}.\frac{\partial z}{\partial q} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sayısal İntegrasyon

Giriş

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ de integrallenebilir, ilkel fonksiyonu da $F(x)$ ise, bu taktirde

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{117}$$

formülü bilinmektedir. Bu formül literatürde Newton-Leibnitz formülü olarak bilinmektedir.

Fakat $F(x)$ ilkel fonksiyonunun bulunması her zaman mümkün olmaz. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonu tablo ile verilmişse onun ilkelinin bulunması olanak dışıdır. Benzer durumlar katlı integraller için söz konusudur. Bu nedenle sayısal integral formüllerinin türetilmesi önem kazanmaktadır.

Sayısal integralleme problemi, integral altı fonksiyonunun belirli noktalardaki değerleri yardımıyla belirli integral değerinin bulunması problemidir. Bir katlı integrallerin sayısal hesaplanması (mekanik) kuadratüreme, iki katlı integrallerin sayısal hesaplanması ise kubatürleme adını almaktadır. Uygun formüllere ise kuadratür ve kubatür formülleri denir.

Kuadrature integrallerin yaklaşık olarak hesaplanmasında $f(x)$ fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{118}$$

integrali, verilen x_i düğüm absis noktalarında ve A_i ağırlığında

$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{119}$$

biçiminde toplam formülünde hesaplanır. Bütün kuadratüre kurallarında integralin değeri interpolasyon polinomlarından yararlanılarak hesaplanır. Yani $f(x)$ fonksiyonu yerine yaklaşık bir $P_n(x)$ polinomunun alınır ve integralin değeri yaklaşık olarak hesaplanır.

Sayısal integrasyon formülleri iki gruba ayrılabilir. Bunlar Newton-Cotes formüleri ve Gaussian quadrature yapılarıdır. Newton-Cotes formülleri eşit aralıklı absisler ile tarif edilir ve yamuk kuralı, Simpson kuralı gibi iyi bilinen yöntemler içerir. Eğer $f(x)$ fonksiyonunu az işlemle yada eşit aralıkta hesaplanmak istenirse, Newto-Cotes formülleri interpolasyon polinomlarıyla formüllerindirildiğiden herbir parçaya bir polinom uydurmak gerektirmektedir.

Gaussian Kuadratürelerde absislerin yerleri mümkün olan en iyi doğrulukta sonuç elde etmeye göre seçilir. Çünki Gaussian kuadratüre verilen hassasiyetin bir seviyesine göre integralin hesaplamaları daha az işlemler gerektirir. Özellikle $f(x)$ fonksiyonunun hesaplamaları zor olduğunda bu durum popülerdir. Gauss kuadraturenin bir başka avantajı integrallerdeki tekilliklerde yani tanımsızlık yapan yerlerde bu metodun işlem yapabilmesidir. Örneğin aşağıdaki integralin hesaplanmasında Gaussian formülleri ra-

hatlıkla kullanılabilir.

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

burada $g(x)$ düzgün bir fonksiyondur.

Newton-Cotes Kuadratür Formülü

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

integralin hesaplandığını düşünelim, $h = \frac{b-a}{n}$ kabul ederek $[a, b]$ aralığını eşit adımlı n eşit parçalara ayıralım, bu durumda $x_0 = a$, $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ve $x_n = b$ olacaktır. $f(x)$ fonksiyonu yerine bütün düğüm noktalarından ğeçen n. dereceden bir polinom almalıyız. Bu polinom aşağıdaki gibi Lagrange intepolasyon polinomu yapısındadır.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

$f(x)$ yerine bu polinomu ele alırsak aşağıdaki kuadratür formülünü elde edebiliriz.

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i)\int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx\right] = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{120}$$

burada

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Denklem (120)'e Newton-Cotes[5] formülleri denir. Bu formüllerin klasik örnekleri $n = 1$ için Yamuk kuralı, $n = 2$ için Simpson $1/3$ kuralı ve $n = 3$ içinde Simpson $3/8$ kuralıdır. Bunlar arasındaki en önemlisi yamuk kuralıdır. Yamuk kuralı Richardson extrapolasyon ile birleştirilirse Romberg integrasyon kuralı elde edilir, bu yöntem gayet güzel sonuçlar elde edilen bir yöntemdir.

[5] Roger Cotes (1682-1716), 1704 de Cambridge Üniversitesinde ilk Plumian Profesör olmadan önce mütevazi bir geçmişe sahipti. İnterpolasyon ve integrasyona yönelik sayısal yöntemler alanında ünlü çalışmalar yapmıştır. Newton onun hakkında *"Eğer o yaşasaydı bazı şeyler hakkında daha fazla bilgi sahibi olabilirdik"* demiştir.

Yamuklar Formülü ve Onun Kalan Terim

Bu yöntem, $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ve $x = b$ eğrileri arasındaki alanı yükseklikleri eşit olan yamuklara bölerek, küçük yamukların alanları toplamının integralin değerine yaklaşık olarak eşit olacağı düşünülerek elde edilmiş bir yöntemdir. Aynı yöntemi Newton-Cotes formulünden elde etmek istersek önceki kısımdaki (120) formülünde $n = 1$ kabul edilir. Bu taktirde

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\frac{x-b}{h} \\ L_1 &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-a}{h} \end{aligned}$$

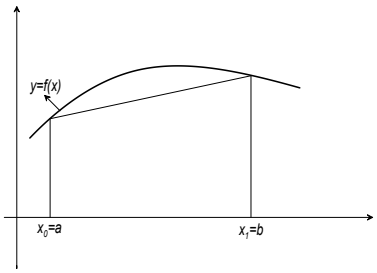
olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{h}\int_a^b (x-b)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2} \\ A_1 &= \frac{1}{h}\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bulduklarımızı denklem (120) e yerine yazarsak

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \tag{121}$$

olacaktır. Bu bir yamuklar formülüdür.



Şekil 3: Yamuk yöntemi

(121) formülünün kalan terimi yani hatasının ne kadar olduğuna bakalım

$$R = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

ifadesine eşittir. $y \in C^2[a,b]$ olsun $R = R(h)$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} ydx - \frac{h}{2}(y(x_0) + y(x_0+h))$$

olacaktır. Bu formülü h'a göre iki defa diferensiyelleyelim.

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0+h) - \frac{1}{2}[y(x_0) + y(x_0+h)] - \frac{h}{2}y'(x_0+h) = \frac{1}{2}[y(x_0+h) - y(x_0)] - \frac{h}{2}y'(x_0+h) \\ R''(h) &= \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{h}{2}y''(x_0+h) = -\frac{h}{2}y''(x_0+h) \end{aligned}$$

Burada aynı zamanda $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$ sağlamaktadır. h'a göre integrallersek ve orta değer hakkında teoremi kullanırsak

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h ty''(x_0+t)dt = -\frac{1}{2}y''(\xi)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}y''(\xi)$$

elde edilecektir. Burada $\xi \in (x_0, x_0+h)$ dır. $R(h)$ için ise

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2y''(\xi)dt = -\frac{1}{4}y''(\xi)\int_0^h t^2dt = -\frac{h^3}{12}y''(\xi)$$

Burada $\xi \in (x_0, x_0+h)$ dır. Böylece $\xi \in (x_0, x_1)$ olmak üzere

$$R = -\frac{h^3}{12}y''(\xi)$$

bulunacaktır. Burada görülüyor ki, eğer $y'' > 0$ ise (121) formülü fazlası ile, eğer $y'' < 0$ ise (121) formülü eksiği ile integral değerini buluyor.

Genel Yamuklar Kuralı

$$\int_a^b ydx$$

integralini hesaplamak için $[a,b]$ aralığını n tane eşit $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ aralıklarına ayıralım. Her aralığa yamuklar formülünü uygulayalım $h = \frac{b-a}{n}$ kabul ederek ve integrali bulunan fonksiyonun x_i noktalarındaki değerlerini $y_i = f(x_i)$ ile işaretleyerek, aşağıdaki bağıntıyı türetebiliriz.

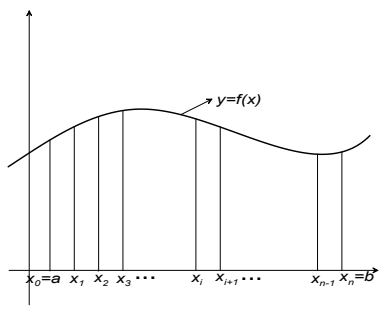
$$\int_a^b ydx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

veya

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n) \tag{122}$$

Geometrik olarak (122) formülü $y = f(x)$ eğrisi yerine kırık çizgi ele alınması sonucunda türetilmiştir. Eğer $y \in C^2[a,b]$ ise (122) kuadratür formülünün kalan terimi

$$R = \int_{x_0}^{x_n} ydx - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n}(y_{i-1}+y_i) = \sum_{i=0}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} ydx - \frac{h}{2}(y_{i-1}+y_i)\right] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n}y''(\xi_i) \tag{123}$$



Şekil 4: Genel Yamuk yöntemi

şeklindedir. Burada $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ dir.

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} y''(\xi_i)$$

büyüklüğünü ele alalım (Aritmetik Ortalaması)

$$\min_{[a,b]} y'' = m_2, \ \max_{[a,b]} y'' = M_2$$

olsun.

$$m_2 \leq \mu \leq M_2$$

olduğu açıktır. y'', $[a,b]$ de sürekli olduğu için

$$\mu = f''(\xi)$$

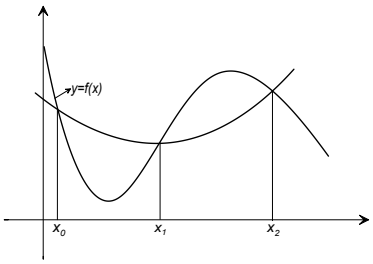
olacak şekilde $\xi \in [a,b]$ dir.

Simpson Kuralları

Yamuk kuralında egrinin altında bir yamuk çizip, onun alanını bularak integralin alanını buluruz buda integralin yaklaşık değerini bulmada belli hata oranına sebep olmaktadır. Simpson kurallarında eğri üzerinde iki nokta alıp onları düz doğruyla birleştirerek alan bulmak yerine iki nokta arasında bir nokta daha alıp üç noktadan geçen bir parabol (2. dereceden polinom) elde ederek eğri yerine parabolün alanını bulmaya (1/3 Simpson kuralı), yada iki nokta arasında iki nokta daha alıp dört noktadan geçen bir kübik (3. dereceden) (3/8 Simpson kuralı) polinom alarak onun alanını bulmaya dayanmaktadır. Tabiiki iki düğüm noktasından bir doğru çizmek yerine oradan bir eğri çizmek hata oranını dahada azaltacaktır.

Simpson'un 1/3 Formülü ve Onun Kalan Termi

Simpsonun 1/3 kuralında eğri yerine 2. dereceden bir polinon alınarak onun alanı hesaplanır. Böylece verilen aralıkta yaklaşık olarak eğrinin alanını hesaplamış oluruz. Simpson yönteminde yamuk kuralında olduğu düğüm noktalarını ne kadar çok alırsak o kadar iyi sonuç elde ederiz. Eğri yerine seçilecek ikince dereceden polinomu en kolay şekilde Lagrange polinomundan yararlanarak bulabiliriz. Bu amaç için Newton-Kotes (120) formülünde $n = 2$ alalım, bu durumda



Şekil 5: Simpson 1/3 Kuralı

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

buradan $x = x_0 + q.h$, $dx = h.dq$ $x_1 = x_0 + 1.h$ ve $x_2 = x_0 + 2.h$ alalım vede A_i integrallerini hesaplıyalım

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^2 \frac{(q-1)(q-2)}{(-1).(-2)} h.dq = \frac{h}{2}\left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) = \frac{h}{3} \\
A_1 &= \int_0^2 \frac{q(q-2)}{-1} h.dq = \frac{h}{-1}\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4h}{3} \\
A_2 &= \int_0^2 \frac{q(q-1)}{2.1} h.dq = \frac{h}{2}\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

bulunacaktır.

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) \tag{124}$$

elde ederiz. (124) formülüne Simpson[6] formülü denir. Geometrik olarak bu formül $f(x)$ eğrisi yerine (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) noktalardan geçen $y = P_2(x)$ parabolü ele alınarak bulunmuştur.

[6] Thomas Simpson (1710-1761) babası bir dokumacı olduğu için kendiside başlangıçta dokumacı olarak kendini yetiştirmişken daha sonra kendi kendine Matematik üzerine çalışmıştır. 1750 de iki cilt The Doctrine and Application of Fluxions adlı calculus kitabı basılmasına rağmen onun ana ilgi alanı olasılık teorisidir.

Bu formülün kalan terimi

$$R=\int_{x_0}^{x_2} ydx-\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

şeklinde olacaktır. $y\in C''\left[a,b\right]$ olsun yamuklar metodunda yapılanların benzerini şimdi de yapalım. x_1 $\left[x_0,x_2\right]$ nın orta noktası olsun kalan terim ise h ın fonksiyonu olsun. Yani $R=R(h)$ olsun yani

$$R(h)=\int_{x_1-h}^{x_1+h} ydx-\frac{h}{3}\left[y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)\right]$$

olacaktır. $R(h)$ fonksiyonunu 3 defa türevleyelim

$$\begin{aligned}
R'(h) &= \left[y(x_1+h)+y(x_1-h)\right]-\frac{1}{3}\left[y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)\right]-\frac{h}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]\\
&= \frac{2}{3}\left[y(x_1-h)+y(x_1+h)\right]-\frac{4}{3}y(x_1)-\frac{h}{3}\left[y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right];\\
R''(h) &= \frac{2}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]-\frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]-\frac{h}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]-\frac{h}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right];\\
R'''(h) &= \frac{1}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right]-\frac{1}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right]-\frac{h}{3}\left[-y'''(x_1-h)+y'''(x_1+h)\right]\\
&= -\frac{h}{3}\left[-y'''(x_1-h)+y'''(x_1+h)\right]=-\frac{2h^2}{3}y^{(4)}(\xi_3);
\end{aligned}$$

burada $\xi_3\in(x_1-h,x_1+h)$ dır. Diğer taraftan ise $R(h)=R'(h)=R''(h)=0$ dır. Orta değer hakkında teoremi kullanarak $R'''(h)$ fonksiyonunu ardışık olarak integralleyelim

$$R''(h)=R''(0)+\int_0^h R'''(t)dt=-\frac{2}{3}\int_0^h t^2y^{(4)}(\xi_3)dt=-\frac{2}{3}y^{(4)}(\xi_2)\int_0^h t^2dt=-\frac{2}{9}y^{(4)}(\xi_2)$$

burada $\xi_2\in(x_1-h,x_1+h)$ dır.

$$R'(h)=R'(0)+\int_0^h R''(t)dt=-\frac{2}{9}\int_0^h t^3y^{(4)}(\xi_2)dt=-\frac{2}{9}y^{(4)}(\xi_1)\int_0^h t^3dt=-\frac{1}{18}h^4y^{(4)}(\xi_1)$$

burada $\xi_1\in(x_1-h,x_1+h)$ dır.

$$R(h)=R(0)+\int_0^h R'(t)dt=-\frac{1}{18}\int_0^h t^4y^{(4)}(\xi_1)dt=-\frac{1}{18}y^{(4)}(\xi)\int_0^h t^4dt=-\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi)$$

burada $\xi\in(x_1-h,x_1+h)$ dır. Dolayısıyla Simpson formülünün kalan termi

$$R=-\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi) \tag{125}$$

şeklindedir. Burada $\xi\in(x_0,x_2)$ dir. Bu nedenle Simpson formülü küçük sayıda ordinatlar için yüksek hassasiyete sahiptirler.

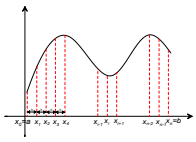
Bileşik Simpson 1/3 *Kuralı*

$n=2m$ olsun $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$ $y=f(x)$ fonksiyonunun $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=b$ noktalarındaki değerleri olsun. Burada

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$$

dir.

Simpson formülünü ikili $\left[x_0,x_2\right],\left[x_2,x_4\right],\cdots,\left[x_{2m-2},x_{2m}\right]$ aralıklarına



Şekil 6: Bileşik 1/3 Simpson yöntemi

uygulayalım. Her aralığın genişliği $2h$ dır.

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

veya

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right) \qquad (126)$$

$y \in C^4[a,b]$ olsun. $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ aralığına Simpson formülünü uygulayalım

$$r_k = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi_k)$$

Burada $\xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$ dır. Bu kalan terimleri toplarsak, sonuçta Simpson formülünün kalan terimi

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^{m} y^{(4)}(\xi_k)$$

şekilde buluruz. $y^{(4)}(x) \in C[a,b]$ olduğu için

$$y^{(4)}(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y^{(4)}(\xi_k)$$

olacak şekilde $\xi \in [a,b]$ sayısı mevcut olacaktır. Bu nedenle sonuçta

$$R = -\frac{mh^5}{90} y^{(4)}(\xi_k) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 y^{(4)}(\xi_k)$$

bulunacaktır. Burada $\xi \in [a,b]$ dir. Eğer bırakılabilen hata $\varepsilon > 0$ ise, bu taktirde

$$M_4 = \max |y^{(4)}(x)|$$

kabul ederek h adımının tespit edilmesi için

$$(b-a)\frac{h^4}{180} M_4 < \varepsilon$$

eşitsizliği, burada da

$$h < \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}}$$

bulunur.

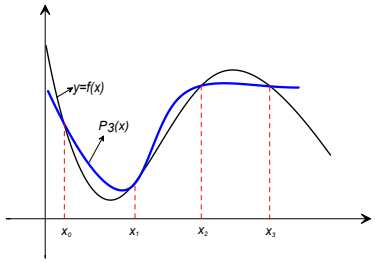
Simpson'un 3/8 *Yöntemi*

Simpsonun 3/8 kuralında eğri yerine 3. dereceden bir polinon alınarak onun alanı hesaplanır. Böylece verilen aralıkta yaklaşık olarak eğrinin alanını hesaplanmış olur. Üçüncü dereceden bir polinomu hesaplamak için dört nokta gerekmektedir. $[a,b]$ aralığında bir integral için, noktalar $x_0 = a$, $x_3 = b$ uç noktaları ile aralarından x_1 ve x_2 üç eşit aralığa bölünmüş dört noktadan oluşur. Simpson 3/8 yöntemindede düğüm noktalarını ne kadar çok alırsak o kadar iyi sonuç elde ederiz. Eğri yerine seçilecek üçüncü dereceden

polinomu en kolay şekilde Lagrange polinomundan yararlanarak bulabiliriz. Bu amaç için Newton-Kotes (120) formülünde $n = 3$ alınmalıdır. Benzer işlemleri burada da yapıldığında

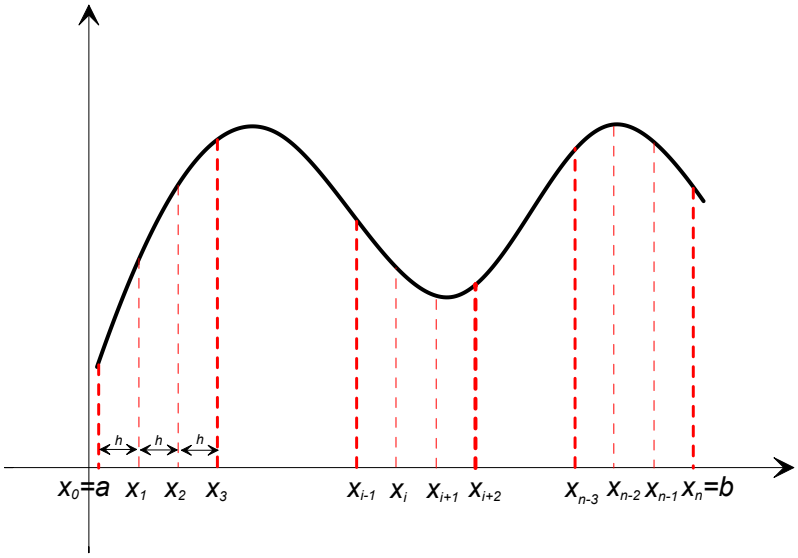
$$\int_{x_0}^{x_3} y dx = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right) \tag{127}$$

formülünü elde ederiz. (127) formülüne Simpson 3/8 formülü denir. Geometrik olarak bu formül $f(x)$ eğrisi yerine (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) düğüm noktalardan geçen $y = P_3(x)$ parabolü ele alınarak bulunmuştur.



Şekil 7: Simpson 3/8 Kuralı

Bileşik Simpson 3/8 Kuralı



Şekil 8: Bileşik 3/8 Simpson yöntemi

Bileşik Simpsonun 3/8 yönteminde bütün $[a, b]$ aralığı $n = 3m$ eşit aralığa bölünür. Bu aralık sayısı keyfi genişlikte fakat aralık uzunlukları eşittir. Bu eşit genişlik h ile gösterilir ve $h = (b - a)/n$ ile bulunur. Kübik poilinomlar için dört nokta gerekli olduğundan birinci üç aralığa yani dört noktaya Simpson 3/8 kuralı uygulanır. Aynı kural diğer ikinci grup dört nokta için uygulanır ve uygulama bu şekilde tüm noktalara eşit bir şekide uygulanarak kuralın genel yapısı ortaya çıkartılır. Buradan

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}$$

dir.

Simpson 3/8 formülünü üçlü $[x_0, x_3], [x_3, x_6], \cdots, [x_{2m-3}, x_{2m}]$ aralıklarına uygulayalım. Her aralığın genişliği $3h$ dır.

$$\int_a^b y dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \cdots + \frac{3h}{8}(y_{2m-3} + 3y_{2m-2} + 3y_{2m-1} + y_{2m})$$

veya

$$\int_a^b y dx = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \cdots + 3y_{2m-2} + 3y_{2m-1} + y_{2m}\right) \tag{128}$$

Romberg İntegrasyon Yöntemi

Romberg[7] integrasyon yöntemi Richardson extrapolasyon yöntemiyle bileşik

[7] Werner Romberg (1909-2003) 1955 de asimtotik açılımlarda ardışık terimlerin elenmesi ile Yamuk kuralının doğruluğunu geliştirilmesi için bu yöntemi geliştirmiştir.

yamuk yönteminin birleşimidir. Hesaplamaya önce

$$R_{i,1} = I_i$$

ile başlarız, bu ifadeler, yamuk yönteminde $n = 2^{i-1}$ alarak elde edilen $\int_a^b f(x)dx$ integralinin yaklaşık değerleridir. Bu durumda aralık genişliği

$$h = \frac{b-a}{2^{i-1}}$$

olur.

Romberg integrasyonunda önce $R_{1,1}$ bulunur ve sonra $R_{2,1}$ bulunur böylece birinci sütunu elde ederiz. Bu ifadelerde yamuk yönteminin kuralları geçerli olur daha sonra Richardson Extrapolasyona göre $R_{2,2}$, $R_{3,2}$, $R_{3,3}, \ldots$ ve diğer sütun elemanları bulunur, bunlar için Richardsonun extrapolasyon formülüne göre

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1}, \quad i > 1, \quad j = 2, 3, \ldots, i \tag{129}$$

elde edilir. Bu förmülü aşağıdaki gibi şemalandıra biliriz.

$$\begin{tikzcd}
R_{i-1,j-1} \arrow[dr] & & \\
& \alpha \arrow[dr] & \\
R_{i,j-1} \arrow[r] & \beta \arrow[r] & R_{i,j}
\end{tikzcd}$$

yada

$$\begin{tikzcd}
R_{1,1} \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
R_{2,1} \arrow[r] \arrow[d] & R_{2,2} \arrow[dr] & & \\
R_{3,1} \arrow[r] \arrow[d] & R_{3,2} \arrow[r] & R_{3,3} \arrow[dr] & \\
R_{4,1} \arrow[r] \arrow[d] & R_{4,2} \arrow[r] & R_{4,3} \arrow[r] & R_{4,4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd} \tag{130}$$

bulunur. Romberg integrasyonu ok yönünde iterasyon yapılaran sunuç elde edilir.

Örnek

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

integralinin değerini Romberg yöntemi ile bulunuz.

Çözüm Önce (130) deki birinci sütun elemanlarını bulalım

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \frac{\pi}{2}\left[\sin 0 + \sin \pi\right] = 0 \\
R_{2,1} &= \frac{\pi}{4}\left[\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{2} + \sin \pi\right] = 1.57079633 \\
R_{3,1} &= \frac{\pi}{8}\left[\sin 0 + 2\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) + \sin \pi\right] = 1.89611890 \\
R_{4,1} &= \frac{\pi}{16}\left[\sin 0 + 2\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4} + \cdots + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{8}\right) + \sin \pi\right] \\
&= 1.97423160
\end{aligned}$$

daha sonra ikinci sütunu bulalım

$$\begin{aligned} R_{2,2} &= \frac{4R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = 2.09439511 \\ R_{3,2} &= \frac{4R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = 2.00455976 \\ R_{4,2} &= \frac{4R_{4,1} - R_{3,1}}{3} = 2.00026917 \end{aligned}$$

şimdide üçüncü sütunu bulacağız

$$\begin{aligned} R_{3,3} &= \frac{16R_{3,2} - R_{2,2}}{15} = 1.99857073 \\ R_{4,3} &= \frac{16R_{4,2} - R_{3,2}}{15} = 1.99998313 \end{aligned}$$

ve son olarakta

$$R_{4,3} = \frac{64R_{4,3} - R_{3,3}}{63} = 2.00000555$$

buluruz. Bu buluna değer integralin Romberg integrasyon yöntemiyle sonucudur.

Örnek:

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx \approx 1.07061$$

integralini Romberg integrasyonuyla $R_{3,3}$ ile çözünüz.

Çözüm Önce (130) deki birinci sütun elemanlarını bulalım

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \frac{1}{2}\left[\ln 1 + 2\ln 2\right] = 1.38629 \\ R_{2,1} &= \frac{1}{4}\left[\ln 1 + 2\ln(1.5) + \ln 2\right] = 1.1493 \\ R_{3,1} &= \frac{1}{8}\left[\ln 1 + 2\left(\ln(1.25) + \ln(1.5) + \ln(1.75)\right) + \ln 2\right] = 1.09027 \end{aligned}$$

daha sonra ikinci sütunu bulalım

$$R_{2,2} = \frac{4R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = 1.0703, \quad R_{3,2} = \frac{4R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = 1.07059$$

şimdide üçüncü ve son sütunu bulalım

$$R_{3,3} = \frac{16R_{3,2} - R_{2,2}}{15} = 1.07061$$

buluruz. Bu buluna değer integralin Romberg integrasyon yöntemiyle sonucudur.

Chebyshev Kuadratür Formülü

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i) \tag{131}$$

biçimli kuadratür formülüne bakalım. Burada B_i sabit katsayılardır.

Chebyshev t_i apsislerinin bulunması için aşağıdaki şartların sağlanmasını önerdi.

1. B_i katsayıları bir-birine eşit olsun.
2. (1) kuadratür formülü n.dereceye kadar tüm polinomlar için kesin olsun.(Yani kalan terimi sıfıra eşit olsun.)

B_i ve t_i lerin bulunmasına bakalım.

$$B_1 = B_2 = \cdots = B_n = B$$

kabu ederek ve $f(t) = 1$ için

$$2 = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

sağlanacağını göz önüne alarak sonuçta

$$B = \frac{2}{n}$$

buluruz. Dolayısıyla (1) formülü

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \tag{132}$$

şeklinde olacaktır. t_i leri bulmak için (2) de 2) şartını kullanalım

$$f(t) = t, t^2, \cdots, t^n$$

için $R[f] = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 &= \frac{n}{3} \\ t_1^3 + t_2^3 + \cdots + t_n^3 &= 0 \\ t_1^4 + t_2^4 + \cdots + t_n^4 &= \frac{n}{5} \\ &\vdots \\ t_1^n + t_2^n + \cdots + t_n^n &= \frac{n\left[1-(-1)^{n+1}\right]}{2(n+1)} \end{aligned} \tag{133}$$

sistemi elde ediliyor. Burada $t_1, t_2, \cdots, t_n$ ler bulunabilir. Aşağıdaki tablo $n = 2, 3, \ldots, 7$ değerleri için t_i kökleri verilmektedir. Bernşteyn $n = 8$ ve

Tablo 28: Kotes Katsayıları

n	i	t_i	n	i	t_i	n	i	t_i
2	1.2	± 0.577350	5	1.5	± 0.832498	7	1.7	± 0.883862
3	1.3	± 0.707107		2.4	± 0.374541		2.6	± 0.529657
	2	0		3	0		3.5	± 0.323912
4	1.4	± 0.794654	6	1.6	± 0.866247		4	0
	2.3	± 0.187592		2.5	± 0.422519			
				3.4	± 0.266635			

$n > 10$ için gösterdi ki, (3) sistemi reel köklere sahip değildir. Bu Chebyshev formülünün dezevantajıdır.

Örnek: t_1, t_2, t_3 apsisleri için

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 &= 1 \\ t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 &= 0 \end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= t_1 + t_2 + t_3; \\ C_2 &= t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1; \\ C_3 &= t_1t_2t_3 \end{aligned}$$

olsun. (4) yerine

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[(t_1+t_2+t_3)^2 - \left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right)\right] = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[(t_1+t_2+t_3)^3 - (t_1+t_2+t_3)\left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right) + 2\left(t_1^3+t_2^3+t_3^3\right)\right] = \frac{1}{6}(0-0+0) = 0$$

burada t_i lerin

$$t^3 - C_1t^2 + C_2t - C_3 \text{ veya } t^3 - \frac{1}{2}t = 0$$

denkleminin kökleri olduğu belli oluyor. Buradan

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ t_2 = 0;\ t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur istenen formül

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\left[f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(0) + f(\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

şeklinde olacaktır. Kuadratür formülünü

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

integrali için türetelim

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

olsun. Bu dönüşüm $[a, b]$'ni $[-1, 1]$'e dönüştürüyor. Buradan

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \tag{135}$$

bulunur. Burada

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \tag{136}$$

dir.

Başlangıç Değer Problemleri

Giriş

Bir diferansiyel denklemin analitik çözümünü bulmak kolay değildir ve bazende gerekli değildir. Özellikle mühendislik problemlerinde sayısal çözümler daha uygun ve daha kolaydır. Bu tip problemlerim çözümlerini yaklaşık olarak bulmak için bir başlangıç değer yada değerlerine ihtiyaç duyarız bu durumda denklemimiz başlangıç değer problemi haline gelir.

Bu bölümde diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleriyle ilgileneceğiz. Bu denklemleri çözmek için bu denklemlerin birinci mertebe olmasına dikkat edeceğiz eğer denklem birinci mertebe değil ise denklemleri bazı dönüşümler yoluyla birinci mertebe denklemler haline getireceğiz.

Birinci mertebe diferansiyel deklemlerin en genel hali

$$y' = f(x, y) \tag{137}$$

biçimindedir. Bu denklemlerin çözümünde bir keyfi sabit içerir (integrasyon sabiti). Bu integrasyoon sabitini bulmak için çözüm eğrisi üzerinde bir noktanın değeri bilinmelidir; yani, x in bazı değerlerinde, örneğin $x = a$ gibi bir değerde y nin değeri bilinmelidir. Bu durumda yardımcı şartı

$$y(a) = \alpha \tag{138}$$

biçiminde yazabiliriz.

Benzer şekilde n ci mertebeden bir diferansiyel denklemi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{139}$$

şayet bu diferansiyel denklemin çözmemiz gerekirse denklemi birinci mertebeye indirgememiz gerekir, bunun için denklemi daima n tane birinci mertebe diferansiyel denkleme dönüştürebiliriz. Notasyon olarak

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \ldots \quad y_n = y^{(n-1)}$$

kullanırsak eşdeğer birinci mertebe diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{140}$$

sistemi bulunur. Bu sistemi çözmek için n tane yardımcı şartlara ihtiyaç duyarız. Eğer bu şartları x in aynı değrer için belirlersek problem *başlangıç değer problemi* olarak adlandırılır. *Başlangıç şartları* olarak adlandırılan bu yardımcı şartlarda

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad y_3(a) = \alpha_3, \quad \ldots \quad y_n(a) = \alpha_n$$

yapısında olur.

Eğer y_i x in farklı değerleri için belirlenmiş ise, problem bir *sınır değer problemi* olarak adlandırılır.

Örneğin,

$$y'' = y, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

problemin çözümünü bulmak için verilen her iki yardımcı şartta $x = 0$ da verildiğinden problem, bir başlanğıç değer problemidir. Diğer taraftan

$$y'' = y, \quad y(0) = a, \quad y'(\pi) = b$$

bir sınır değer problemidir, çünki iki yardımcı şarttaki x değerleri iki farklı x değerleri için belirlenmiştir.

Bu bölümde biz yanlızca başlangıç değer problemlerini ele alacağız. Çözümleri çok daha zor olan sınır değer problemlerini diğer bölümde ele alacağız. Ayrıca diferansiyel denklemlerin çözümleri tam çözümlerle karşılaştırılacak ve x ve y nin farklı değerleri gerekli oldukça tablo halinde karşılaştırmak için verilecektir.

Euler Yöntemi

Euler[8] yöntemi birinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin çözümü için en basit yöntemdir. Birinci mertebe diferansiyel denklem

$$y' = f(x, y) \qquad \text{ve başlangıç şartı: } y(x_0) = y_0 \tag{141}$$

olsun. Bu diferansiyel denklemin yaklaşık $y(x)$ çözümünü bulmak için iki farklı yol vardır bulardan biri $y(x)$ fonksiyonunun taylor serisine açıp ilk iki terimini almak ve diğer terimleri ihmal etmektir. Yani

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \cdots$$

almaktır, burada $y'(x_i)$ ifadesi yerine eşiti olan $f(x_i, y_i)$ yazarız. Ayrıca $y_{i+1} = y_i + h$ ve $y_i = y(x_i)$ olarak alırsak

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Euler formulünün son halini elde ederiz.

İkinci yol ise $y(x)$ fonsiyonunun (x_i, y_i) noktasındaki eğimini bulmaktır. Eğim formulünden

$$\text{Eğim} = y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

burada y_{i+1} yanlız bırakır ve $y'(x_i)$ yerine $f(x_i, y_i)$ yazarsak

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

formulü elde edilir. Burada $x_{i+1} = x_i + h$ alınmıştır.

Örnek

$$y' = y + x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$$

dört adımda $y(1)$ in değerini bulunuz.

Çözüm dört adım dendiği için h ifadesini bulalım

$$h = \frac{1 - 0}{4} = 0.25$$

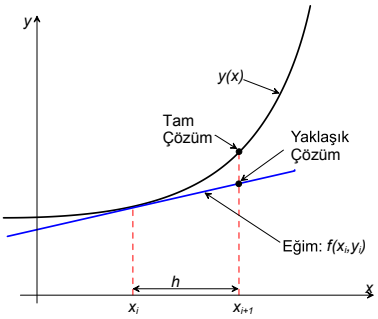
bulunur. Bu durumda

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.50,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1,\ y_0 = 0.5,\ f(x, y) = y + x^2 + 1$$

olur. Formulümüz yazalım

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

[8] Leonhard Euler, 1707 de İsviçre'nin Bale kentinde doğan Euler babasının yol göstemesiyle 14 yaşında öğretmenlik diplomasını almıştır. Analitik yöntemleri, mekanik ve geometriye uygulamıştır. "e sayısı" ünlüdür. Kendi adıyla anılan pek çok teorem ispatlamıştır. Mütevazi bir yapıya sahip olan Euler'in çalışmalarını Rus çariçesi Katerina çok desteklemiştir. Tam 13 çocuğu olan Euler'in eserlerini yazma hızına yetişmek mümkün değildir. Son onyedi yılını kör geçirmesine rağmen çalışmaları azalmamış, artmıştır. En çok esere sahip matematikçi ünvanını taşıyan Euler 76 yaşında vefat etmiştir.



Şekil 9: Euler yöntemi

$i = 0$ için

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

yada

$$y_1 = 0.5 + 0.25\left(0.25 + 0^2 + 1\right) = 0.8125$$

$i = 1$ için

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

yada

$$y_2 = 0.8125 + 0.25\left(0.8125 + 0.25^2 + 1\right) = 1.28125$$

$i = 2$ için

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

yada

$$y_3 = 1.28125 + 0.25\left(1.28125 + 0.5^2 + 1\right) = 1.91406$$

$i = 3$ için

$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$$

yada

$$y_4 = y(1) = 1.91406 + 0.25\left(1.91406 + 0.75^2 + 1\right) = 2.7832$$

Şimdide diferansiyel denklemin tam çözümünü bulalım, denklemin tam çözümü

$$y(x) = 3.5\,e^{-x} - x^2 - 2x - 3$$

dir. Tam çözümle yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması yandaki tabloda verilmiştir.

x	$y_{tam}(x)$	$y_{Euler}(x)$	Hata
0	0.5	0.5	0
0.25	0.931589	0.8125	20
0.5	1.52052	1.28125	20
0.75	2.347	1.91406	20
1	3.51399	2.7832	20

Taylor Serisi Yöntemi

Bu meÖnceki kısımdaki (2) formülünde $n = 1$ kabul edelim. Bu taktirde

$$H_0 = \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2}, \quad H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}$$

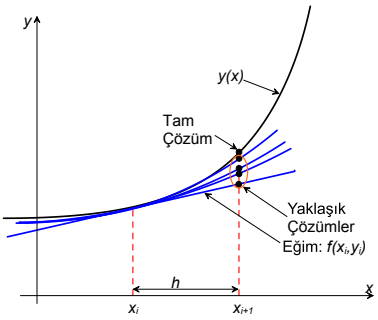
elde edeceğiz. Burada

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right) \tag{142}$$

olacaktır. Bu bir yamuklar formülüdür.

(1) formülkünün kalan terimi

$$R = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right)$$



Şekil 10: Taylor Serisi yöntemi

ifadesine eşittir. $y \in C^2[a, b]$ olsun $R = R(h)$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2}\left(y(x_0) + y(x_0+h)\right)$$

olacaktır. Bu formülü h'a göre iki defa diferensiyelleyelim.

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0+h) - \frac{1}{2}\left[y(x_0) + y(x_0+h)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0+h) = \frac{1}{2}\left[y(x_0+h) - y(x_0)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0+h) \\ R''(h) &= \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{h}{2}y''(x_0+h) = -\frac{h}{2}y''(x_0+h) \end{aligned}$$

Burada aynı zamanda $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$ sağlamaktadır. h'a göre integrallersek ve orta değer hakkında teoremi kullanırsak

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h ty''(x_0+t)dt = -\frac{1}{2}y''(\xi_1)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}y''(\xi)$$

elde edilecektir. Burada $\xi_1 \in (x_0, x_0+h)$ dır. $R(h)$ için ise

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2y''(\xi_1)dt = -\frac{1}{4}y''(\xi)\int_0^h t^2dt = -\frac{h^3}{12}y''(\xi)$$

Burada $\xi \in (x_0, x_0+h)$ dır. Böylece $\xi \in (x_0, x_1)$ olmak üzere

$$R = -\frac{h^3}{12}y''(\xi)$$

bulunacaktır. Burada görülüyor ki, eğer $y'' > 0$ ise (1) formülü fazlası ile, eğer $y'' < 0$ ise (1) formülü eksiği ile integral değerini buluyor.

Runga-Kutta Yöntemi

Newton-Kotes formülünde $n = 2$ kabul edersek

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}-6+4\right) = \frac{1}{6} \\
H_1 &= -\frac{1}{2}.\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)dq = \frac{2}{3} \\
H_2 &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)dq = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

bulunacaktır. $x_2 - x_0 = 2h$ olduğu için

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx = \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right) \tag{143}$$

elde edeceğiz. (1) formülüne Simpson formülü denir. Geometrik olarak bu formül $f(x)$ eğrisi yerine $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ noktalardan geçen $y = L_2(x)$ parabolü ele alındığında bulunabilir.

sekil vvvarrr Bu formülün kalan terimi

$$R = \int_{x_0}^{x_2} ydx - \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

şeklinde olacaktır. $y \in C''[a, b]$ olsun yamuklar metodunda yapılanların benzerini şimdi de yapalım. x_1 $[x_0, x_2]$ nın orta noktası olsun kalan terim ise h ın fonksiyonu olsun. Yani $R = R(h)$ olsun yani

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} ydx - \frac{h}{3}\left[y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)\right]$$

olacaktır. $R(h)$ fonksiyonunu 3 defa türevleyelim

$$\begin{aligned}
R'(h) &= [y(x_1+h)+y(x_1-h)] - \frac{1}{3}[y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)] - \frac{h}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right] \\
&= \frac{2}{3}[y(x_1-h)+y(x_1+h)] - \frac{4}{3}y(x_1) - \frac{h}{3}\left[y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right]; \\
R''(h) &= \frac{2}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right] - \frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right]; \\
R'''(h) &= \frac{1}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right] - \frac{1}{3}\left[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[-y'''(x_1-h)+y'''(x_1+h)\right] \\
&= -\frac{h}{3}\left[-y'''(x_1-h)-y'''(x_1+h)\right] = -\frac{2h^2}{3}y^{(4)}(\xi_3);
\end{aligned}$$

burada $\xi_3 \in (x_1-h, x_1+h)$ dır. Diğer taraftan ise $R(h) = R'(h) = R''(h) = 0$ dır. Orta değer hakkında teoremi kullanarak $R'''(h)$ fonksiyonunu ardışık olarak integralleyelim

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 y^{(4)}(\xi_3)dt = -\frac{2}{3}y^{(4)}(\xi_2)\int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9}y^{(4)}(\xi_2)$$

burada $\xi_2 \in (x_1-h, x_1+h)$ dır.

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 y^{(4)}(\xi_2)dt = -\frac{2}{9}y^{(4)}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18}h^4 y^{(4)}(\xi_1)$$

burada $\xi_1 \in (x_1-h, x_1+h)$ dır.

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 y^{(4)}(\xi_1)dt = -\frac{1}{18}y^{(4)}(\xi)\int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{18}y^{(4)}(\xi)$$

burada $\xi \in (x_1-h, x_1+h)$ dır. Dolayısıyla Simpson formülünün kalan termi

$$R = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi) \tag{144}$$

şeklindedir. Burada $\xi \in (x_0, x_2)$ dir. Bu nedenle Simpson formülü küçük sayıda ordinatlar için yüksek hassasiyete sahiptirler.

Heun Yöntemi

Newton-Kotes Formüllünde $n = 3$ kabu edersek

$$\int_{x_0}^{x_3} y dx = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right) \tag{145}$$

olacaktır (3/8 kuralı). Kalan terim

$$R = -\frac{3h^5}{80}y^{(4)}(\xi)$$

olacaktır. Burada $\xi \in (x_0, x_3)$ dür. Yani aynı adımlar için Newton formülü Simpson formülünden az hassasiyetli olacaktır.

$(n+1)$ orantılı Newton-Kotes formülünün kalan terimi yeterince pürüzsüz $y = f(x)$ fonksiyonu için

$$R = 0\left(h^{2\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right]+3}\right)$$

yazılabilir. Burada $\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right]$, $\frac{n}{2}$ nin tam kısmıdır.

Tablo 29: Kotes Katsayıları

n	$\hat{H}_0$	$\hat{H}_1$	$\hat{H}_2$	$\hat{H}_3$	$\hat{H}_4$	$\hat{H}_5$	$\hat{H}_6$	$\hat{H}_7$	$\hat{H}_8$	Ortak Payda (N)
1	1	1								2
2	1	4	1							6
3	1	3	3	1						8
4	7	32	12	32	7					90
5	19	75	50	50	75	19				288
6	41	216	27	272	27	216	41			840
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751		17280
8	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989	28350

Buradan fark edilebilir ki, hassasiyet mertebesi anlamında tek sayıda ordinatlı kuadratür formülleri daha karlı durumdadırlar. Aşağıda kotes katsayıları tablosu verilmiştir. Burada $H_i = \frac{\hat{H}_i}{N}$ kabul edilmiştir.

Kontrol etmek için $\sum\limits_{i=0}^{n} \hat{H}_i = 1$ eşitliği ele alınabilir.

Örnek:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

integralini 7 ordinatlı Newton-Kotes formülünü kullanarak hesaplayınız.

Çözüm: $h = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$ kabul edelim ve aşağıdaki tabloyu türetelim. Bu tablodan

$$I = \frac{1}{840}.581,994372 = 0,6933$$

bulunur.

i	x_i	y_i	$\hat{H}_i$	$\hat{H}_i y_i$
0	0	1	41	41
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{7}$	216	185,142857
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	27	20,25
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	272	181,333333
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	27	16,2
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{11}$	216	117,818182
6	1	$\frac{1}{2}$	41	20,25
S				581,994372

integralin kesin değeri $I = \ln 2 = 0,69315$ dir.

Büyük n ler için Kotes katsayıları kolay hafızaya alınan sayılar olmadığı için genelde integral aralığı küçük genişlikli alt aralıklara ayrılır ve her alt aralığa az sayıda ordinatlı Kotes formülleri uygulanır. Böylece pratik çözüm bulunmuş oluyor bu yöntemle gereken hassasiyetli kuadratür formülleri türetilebilir.

Sınır Değer Problemleri

Sayısal İntegral Formülleri

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de integrallenebilir, ilkel fonksiyonu da $f(x)$ ise, bu taktirde

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{146}$$

formülü bilinmektedir. Bu formül literatürde Newton-Leibnitz formülü olarak bilinmektedir.

Fakat $f(x)$ ilkel fonksiyonunun bulunması her zaman mümkün olmuyor. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonu tablo ile verilmişse onun ilkelinin bulunması olanak dışıdır. Benzer durumlar katlı integraller için söz konusudur. Bu nedenle sayısal integral formüllerinin türetilmesi önem kazanmaktadır.

Sayısal integralleme problemi, integral altı fonksiyonunun belirli noktalardaki değerleri yardımıyla belirli integral değerinin bulunması problemidir. Bir katlı integrallerin sayısal hesaplanması (mekanik) kuadratüreme, iki katlı integrallerin sayısal hesaplanması ise kubatürleme adını almaktadır. Uygun formüllere ise kuadratür ve kubatür formülleri denir.

Biz önce bir katlı integrallerin hesaplanmasını ele alacağız. Bu integrallerin hesaplanmasının en basit yolu aşağıda verilir.

$f(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında bir j*(x)* interpolasyon fonksiyonu karşıt getirilir, daha sonra ise

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \tag{147}$$

kabul edilir. $j(x)$ fonksiyonu öyle şekle sahip olmalıdır ki, (2) nin sağ tarafı hemen hesaplana-bilsin

Eğer $f(x)$ fonksiyonu analitik olarak vermişse, bu taktirde (2) formülünün bırakabilen hatasının bulunması da söz konusu oluyor. $j(x)$ fonksiyonu olarak Lagrange polinomunu ele alalım $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığının (n+1) tane $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktasında verilmiş olsun ve bu noktalara tekabül eden değerleri de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ olsun

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x)dx$$

değerinin tahmini olarak bulunması istenmektedir. Verilmiş y_i değerlerine göre Lagrange polinomunu türetelim.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} y_i \tag{148}$$

burada $\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ve $L_n(x_i) = y_i$ dir. $f(x)$ fonksiyonu yerine $L_n(x)$ yazarsak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R_n[f] \tag{149}$$

elde edilecektir. $R_n[f]$ kalan terimidir ve kuadratür formülünün hata oluşumunu ifade etmektedir. Burada (3) ü kullanarak (4) formülünden

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i \tag{150}$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{151}$$

dir. Eğer a ve b uçları düğüm noktaları ise, (5) formülü kapalı tür, aksi taktirde ise açık tür kuadratür formülleri olmaktadır. Göründüğü gibi A_i katsayıları $f(x)$ fonksiyonuna bağlı değildir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu n. dereceden bir polinomu ise bu taktirde (5) formülü kesin olacaktır. Nedeni $L_n(x) \equiv f(x)$ olmasıdır. Özel durumda (5) formülü $y = x^x$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ fonksiyonu için de kesin olacaktır. Yani $R_n\left[x^k\right] = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ olacaktır.

(5) formülünde sırası ile $1, x, x^2, \ldots, x^n$ yazalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_{i=0}^{n} A_i \\ I_1 &= \sum_{i=0}^{n} A_i x_i \\ &\vdots \\ I_n &= \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^n \end{aligned} \tag{152}$$

şeklinde $(n+1)$ tane denklemler sistemi ortaya çıkacaktır. Burada

$$I_K = \int_a^b x_K dx = \frac{b^{K+1} - a^{K+1}}{K+1} \quad (K = 0, 1, \ldots, n) \tag{153}$$

dir. (8) i (7) de bulundurarak (7) sisteminden $A_0, A_1, \ldots, A_n$ katsayılarını bulabiliriz. (7) denklemler sisteminin determinantı Wronski determinantıdır ve

$$D = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$$

dır. (7) ve (8) kullanırsak Lagrange polinomunun türetmeye gerek kalmıyor. Kuadratür formüllerinin hata oluşumunun hesaplanması için Nikolski tarafından önerilen method en basit sayılabilir.

Örnek:

$$\int_a^b y dx = A_0 y\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 y\left(\frac{3}{4}\right) \tag{154}$$

formülünü türetiniz.

Çözüm: $y = x^k$ $(k = 0, 1, 2)$ olsun (8) formülüne göre

$$\int_0^1 dx = 1, \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

olduğu için (7) denklemler sistemi için

$$\begin{aligned} 1 &= A_0 + A_1 + A_2 \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{4}A_2 \\ \frac{1}{3} &= \frac{1}{16}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{9}{16}A_2 \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Burada

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{3}$$

bulunur. Bu nedenle de

$$\int_0^1 y dx = \frac{2}{3} y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} A_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} A_2 y\left(\frac{3}{4}\right) \tag{155}$$

formülü türetilmiş olacaktır. Bu formül 2. dereceden tüm polinomlar için kesinlik kazanmaktadır. Yani, $R\left[P_2(x)\right] = 0$ dır.

Newton-Kotes Kuadratür Formülü

$\int_a^b f(x)dx$ integralin hesaplandığını düşünelim $h = \frac{b-a}{n}$ kabul ederek $[a, b]$ aralığını eşit adımlı n eşit parçalara ayıralım $x_0 = a$, $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ $x_n = b$ olacaktır. $y_i = f(x_i)$ olsun. Bu düğüm noktaları için Lagrange intepolasyon problemini ele alalım $f(x)$ yerine bu polinomu ele alırsak aşağıdaki kuadratür formülünü elde edebiliriz.

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i \tag{156}$$

burada A_i henüz bilinmeyen katsayılardır.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x_i)$$

ve

$$P_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \tag{157}$$

olduğunu biliyoruz.

$$q = \frac{x - x_0}{h} \tag{158}$$

kabul edersek ve

$$q^{[n+1]} = q(q-1) \cdots (q-n) \tag{159}$$

formülünü kullanırsak

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} . \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{160}$$

buluruz (1) formülünde y yerine $L_n(x)$ polinomunu alırsak (6) formülüne göre

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} . \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dx$$

veya $q = \frac{x-x_0}{h}$, $dq = \frac{dx}{h}$ olduğuna göre

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} . \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

buluruz. $h = \frac{b-a}{n}$ olduğu için $A_i = (b-a)H_i$ kabul edelim. Burada kullanalım

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} . \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{161}$$

biçimli H_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ katsayıları Kotes katsayıları olarak bilinmektedir. Bu durumda (1) formülü

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^{n} H_i y_i \tag{162}$$

şeklinde olacaktır. Kotes katsayıları için

1. $\sum_{i=0}^{n} H_i = 1$
2. $H_i = H_{n-i}$

formülleri sağlanmaktadır.

Yamuklar Formülü ve Onun Kalan Terim

Önceki kısımdaki (2) formülünde $n = 1$ kabul edelim. Bu taktirde

$$H_0 = \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2}, \quad H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}$$

elde edeceğiz. Burada

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) \tag{163}$$

olacaktır. Bu bir yamuklar formülüdür.

sekil var

(1) formülkünün kalan terimi

$$R = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$$

ifadesine eşittir. $y \in C^2 [a, b]$ olsun $R = R(h)$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2} (y(x_0) + y(x_0 + h))$$

olacaktır. Bu formülü h'a göre iki defa diferensiyelleyelim.

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0+h) - \frac{1}{2}[y(x_0) + y(x_0+h)] - \frac{h}{2} y'(x_0+h) = \frac{1}{2}[y(x_0+h) - y(x_0)] - \frac{h}{2} y'(x_0+h) \\ R''(h) &= \frac{1}{2} y'(x_0+h) - \frac{1}{2} y'(x_0+h) - \frac{h}{2} y''(x_0+h) = -\frac{h}{2} y''(x_0+h) \end{aligned}$$

Burada aynı zamanda $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$ sağlamaktadır. h'a göre integrallersek ve orta değer hakkında teoremi kullanırsak

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^h t y''(x_0 + t) dt = -\frac{1}{2} y''(\xi_1) \int_0^h t dt = -\frac{h^2}{4} y''(\xi)$$

elde edilecektir. Burada $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$ dır. $R(h)$ için ise

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{4} \int_0^h t^2 y''(\xi_1) dt = -\frac{1}{4} y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12} y''(\xi)$$

Burada $\xi \in (x_0, x_0 + h)$ dır. Böylece $\xi \in (x_0, x_1)$ olmak üzere

$$R = -\frac{h^3}{12} y''(\xi)$$

bulunacaktır. Burada görülüyor ki, eğer $y'' > 0$ ise (1) formülü fazlası ile, eğer $y'' < 0$ ise (1) formülü eksiği ile integral değerini buluyor.

Simpson Formülü ve Onun Kalan Termi

Newton-Kotes formülünde $n = 2$ kabul edersek

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}-6+4\right) = \frac{1}{6} \\ H_1 &= -\frac{1}{2}.\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)dq = \frac{2}{3} \\ H_2 &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)dq = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

bulunacaktır. $x_2 - x_0 = 2h$ olduğu için

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx = \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right) \tag{164}$$

elde edeceğiz. (1) formülüne Simpson formülü denir. Geometrik olarak bu formül $f(x)$ eğrisi yerine $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ noktalardan geçen $y = L_2(x)$ parabolü ele alındığında bulunabilir.

sekil vvvarrr Bu formülün kalan terimi

$$R = \int_{x_0}^{x_2} ydx - \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

şeklinde olacaktır. $y \in C''[a, b]$ olsun yamuklar metodunda yapılanların benzerini şimdi de yapalım. x_1 $[x_0, x_2]$ nın orta noktası olsun kalan terim ise h ın fonksiyonu olsun. Yani $R = R(h)$ olsun yani

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} ydx - \frac{h}{3}\left[y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)\right]$$

olacaktır. $R(h)$ fonksiyonunu 3 defa türevleyelim

$$\begin{aligned} R'(h) &= \left[y(x_1+h) + y(x_1-h)\right] - \frac{1}{3}\left[y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[y(x_1-h) + y(x_1+h)\right] - \frac{4}{3}y(x_1) - \frac{h}{3}\left[y'(x_1-h) + y'(x_1+h)\right]; \\ R''(h) &= \frac{2}{3}\left[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)\right] - \frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)\right]; \\ R'''(h) &= \frac{1}{3}\left[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)\right] - \frac{1}{3}\left[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)\right] - \frac{h}{3}\left[-y'''(x_1-h) + y'''(x_1+h)\right] \\ &= -\frac{h}{3}\left[-y'''(x_1-h) - y'''(x_1+h)\right] = -\frac{2h^2}{3}y^{(4)}(\xi_3); \end{aligned}$$

burada $\xi_3 \in (x_1 - h, x_1 + h)$ dır. Diğer taraftan ise $R(h) = R'(h) = R''(h) = 0$ dır. Orta değer hakkında teoremi kullanarak $R'''(h)$ fonksiyonunu ardışık olarak integralleyelim

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 y^{(4)}(\xi_3)dt = -\frac{2}{3}y^{(4)}(\xi_2)\int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9}y^{(4)}(\xi_2)$$

burada $\xi_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$ dır.

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 y^{(4)}(\xi_2)dt = -\frac{2}{9}y^{(4)}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18}h^4 y^{(4)}(\xi_1)$$

burada $\xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h)$ dır.

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 y^{(4)}(\xi_1)dt = -\frac{1}{18}y^{(4)}(\xi)\int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{18}y^{(4)}(\xi)$$

burada $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$ dır. Dolayısıyla Simpson formülünün kalan termi

$$R = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi) \tag{165}$$

şeklindedir. Burada $\xi \in (x_0, x_2)$ dir. Bu nedenle Simpson formülü küçük sayıda ordinatlar için yüksek hassasiyete sahiptirler.

Yüksek Mertebeden Newton-Kotes Formülleri

Newton-Kotes Formüllünde $n = 3$ kabu edersek

$$\int_{x_0}^{x_3} y dx = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right) \tag{166}$$

olacaktır (3/8 kuralı). Kalan terim

$$R = -\frac{3h^5}{80}y^{(4)}(\xi)$$

olacaktır. Burada $\xi \in (x_0, x_3)$ dür. Yani aynı adımlar için Newton formülü Simpson formülünden az hassasiyetli olacaktır.

$(n+1)$ orantılı Newton-Kotes formülünün kalan terimi yeterince pürüzsüz $y = f(x)$ fonksiyonu için

$$R = 0\left(h^{2\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right]+3}\right)$$

yazılabilir. Burada $\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right]$, $\frac{n}{2}$ nin tam kısmıdır.

Buradan fark edilebilir ki, hassasiyet mertebesi anlamında tek sayıda ordinatlı kuadratür formülleri daha karlı durumdadırlar. Aşağıda kotes katsayıları tablosu verilmiştir. Burada $H_i = \frac{\hat{H}_i}{N}$ kabul edilmiştir.

Tablo 30: Kotes Katsayıları

n	$\hat{H}_0$	$\hat{H}_1$	$\hat{H}_2$	$\hat{H}_3$	$\hat{H}_4$	$\hat{H}_5$	$\hat{H}_6$	$\hat{H}_7$	$\hat{H}_8$	Ortak Payda (N)
1	1	1								2
2	1	4	1							6
3	1	3	3	1						8
4	7	32	12	32	7					90
5	19	75	50	50	75	19				288
6	41	216	27	272	27	216	41			840
7	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751		17280
8	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989	28350

Kontrol etmek için $\sum_{i=0}^{n} \hat{H}_i = 1$ eşitliği ele alınabilir.

Örnek:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

integralini 7 ordinatlı Newton-Kotes formülünü kullanarak hesaplayınız.

Çözüm: $h = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$ kabul edelim ve aşağıdaki tabloyu türetelim. Bu tablodan

$$I = \frac{1}{840}.581,994372 = 0,6933$$

i	x_i	y_i	$\hat{H}_i$	$\hat{H}_i y_i$
0	0	1	41	41
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{7}$	216	185,142857
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	27	20,25
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	272	181,333333
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	27	16,2
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{11}$	216	117,818182
6	1	$\frac{1}{2}$	41	20,25
S				581,994372

bulunur.

integralin kesin değeri $I = \ln 2 = 0,69315$ dir.

Büyük n ler için Kotes katsayıları kolay hafızaya alınan sayılar olmadığı için genelde integral aralığı küçük genişlikli alt aralıklara ayrılır ve her alt aralığa az sayıda ordinatlı Kotes formülleri uygulanır. Böylece pratik çözüm bulunmuş oluyor bu yöntemle gereken hassasiyetli kuadratür formülleri türetilebilir.

Genel Yamuklar Kuralı

$\int\limits_a^b ydx$ integralini hesaplamak için $[a,b]$ aralığını n tane eşit $[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{n-1},x_n]$ aralıklarına ayıralım. Her aralığa yamuklar formülünü uygulayalım $h = \frac{b-a}{n}$ kabul ederek ve integrali bulunan fonksiyonun x_i noktalarındaki değerlerini $y_i = f(x_i)$ ile işaretleyerek, aşağıdaki bağıntıyı türetebiliriz.

$$\int\limits_a^b ydx = \frac{h}{2}(y_0+y_1) + \frac{h}{2}(y_1+y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{n-1}+y_n)$$

veya

$$\int\limits_a^b ydx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \tag{167}$$

şekil var

Geometrik olarak (1) formülü $y = f(x)$ eğrisi yerine kırık çizgi ele alınması sonucunda türetilmiştir. Eğer $y \in C^2[a,b]$ ise (1) kuadratür formülünün kalan terimi

$$R = \int\limits_{x_0}^{x_n} ydx - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n}(y_{i-1}+y_i) = \sum_{i=0}^{n}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} ydx - \frac{h}{2}(y_{i-1}+y_i)\right] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n} y''(\xi_i) \tag{168}$$

şeklindedir. Burada $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ dir.

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} y''(\xi_i)$$

büyüklüğünü ele alalım (Aritmetik Ortalaması) $\min\limits_{[a,b]} y'' = m_2$, $\min\limits_{[a,b]} y'' = M_2$ olsun. $m_2 \le \mu \le M_2$ olduğu açıktır. y'', $[a,b]$ de sürekli olduğu için

$$\mu = f''(\xi)$$

olacak şekilde $\xi \in [a,b]$ dir.

Simpson Formülü (Paraboller Formülü)

$n = 2m$ olsun $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ $y = f(x)$ fonksiyonunun $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b$ noktalarındaki değerleri olsun. Burada

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

dir.

Simpson formülünü ikili $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \cdots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ aralıklarına uygulayalım. Her aralığın genişliği 2h dır.

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + y_{2m-1} + y_{2m})$$

veya

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2m-2} + y_{2m-1} + y_{2m}\right) \tag{169}$$

sekil var

$y \in C^4[a, b]$ olsun. $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ aralığına Simpson formülünü uygulayalım

$$r_k = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi_k)$$

Burada $\xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$ dır. Bu kalan terimleri toplarsak, sonuçta Simpson formülünün kalan terimi

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^{m} y^{(4)}(\xi_k)$$

şekilde buluruz. $y^{(4)}(x) \in C[a, b]$ olduğu için

$$y^{(4)}(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y^{(4)}(\xi_k)$$

olacak şekilde $\xi \in [a, b]$ sayısı mevcut olacaktır. Bu nedenle sonuçta

$$R = -\frac{mh^5}{90} y^{(4)}(\xi_k) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 y^{(4)}(\xi_k)$$

bulunacaktır. Burada $\xi \in [a, b]$ dir. Eğer bırakılabilen hata $\varepsilon > 0$ ise, bu taktirde

$$M_4 = \max |y^{(4)}(x)|$$

kabul ederek h adımının tespit edilmesi için

$$(b-a)\frac{h^v}{180} M_4 < \varepsilon$$

eşitsizliği, burada da

$$h < \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}}$$

bulunur.

Chebyshev Kuadratür Formülü

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i) \tag{170}$$

biçimli kuadratür formülüne bakalım. Burada B_i sabit katsayılardır.

Chebyshev t_i apsislerinin bulunması için aşağıdaki şartların sağlanmasını önerdi.

1. B_i katsayıları bir-birine eşit olsun.
2. (1) kuadratür formülü n.dereceye kadar tüm polinomlar için kesin olsun.(Yani kalan terimi sıfıra eşit olsun.)

B_i ve t_i lerin bulunmasına bakalım.

$$B_1 = B_2 = \cdots = B_n = B$$

kabu ederek ve $f(t) = 1$ için

$$2 = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

sağlanacağını göz önüne alarak sonuçta

$$B = \frac{2}{n}$$

buluruz. Dolayısıyla (1) formülü

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \tag{171}$$

şeklinde olacaktır. t_i leri bulmak için (2) de 2) şartını kullanalım

$$f(t) = t, t^2, \cdots, t^n$$

için $R[f] = 0$ olacağından

$$\begin{aligned}
t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\
t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 &= \frac{n}{3} \\
t_1^3 + t_2^3 + \cdots + t_n^3 &= 0 \\
t_1^4 + t_2^4 + \cdots + t_n^4 &= \frac{n}{5} \\
&\vdots \\
t_1^n + t_2^n + \cdots + t_n^n &= \frac{n\left[1 - (-1)^{n+1}\right]}{2(n+1)}
\end{aligned} \tag{172}$$

sistemi elde ediliyor. Burada $t_1, t_2, \cdots, t_n$ ler bulunabilir. Aşağıdaki tablo $n = 2, 3, \ldots, 7$ değerleri için t_i kökleri verilmektedir. Bernşteyn $n = 8$ ve

n	i	t_i	n	i	t_i	n	i	t_i
2	1.2	± 0.577350	5	1.5	± 0.832498	7	1.7	± 0.883862
3	1.3	± 0.707107		2.4	± 0.374541		2.6	± 0.529657
	2	0		3	0		3.5	± 0.323912
4	1.4	± 0.794654	6	1.6	± 0.866247		4	0
	2.3	± 0.187592		2.5	± 0.422519			
				3.4	± 0.266635			

$n > 10$ için gösterdi ki, (3) sistemi reel köklere sahip değildir. Bu Chebyshev formülünün dezevantajıdır.

Örnek: t_1, t_2, t_3 apsisleri için

$$\begin{aligned}
t_1 + t_2 + t_3 &= 0 \\
t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 &= 1 \\
t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 &= 0
\end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= t_1 + t_2 + t_3; \\
C_2 &= t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1; \\
C_3 &= t_1 t_2 t_3
\end{aligned}$$

olsun. (4) yerine

$$C_1 = 0$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\left[(t_1+t_2+t_3)^2 - \left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right)\right] = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$
$$C_3 = \frac{1}{2}\left[(t_1+t_2+t_3)^3 - (t_1+t_2+t_3)\left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right) + 2\left(t_1^3+t_2^3+t_3^3\right)\right] = \frac{1}{6}(0-0+0) = 0$$

burada t_i lerin

$$t^3 - C_1t^2 + C_2t - C_3 \text{ veya } t^3 - \frac{1}{2}t = 0$$

denkleminin kökleri olduğu belli oluyor. Buradan

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ t_2 = 0;\ t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur istenen formül

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{3}\left[f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(0) + f(\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

şeklinde olacaktır. Kuadratür formülünü

$$\int_a^b f(x)dx$$

integrali için türetelim

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

olsun. Bu dönüşüm $[a,b]$'ni $[-1,1]$'e dönüştürüyor. Buradan

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \tag{174}$$

bulunur. Burada

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \tag{175}$$

dir.

Kaynakça

Dizin

fonksiyon, 43

license, 2

newton, 43

typefaces

sizes, 78, 86, 92, 93, 95