NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

Bölünmüş Farklar

f yi $n+1$ nodda interpole eden $(p(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, 2, ..., n)$, **en fazla** n. dereceden **tek** bir interpolasyon polinomunun var olduğunu biliyoruz:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j q_j(x) \tag{1}$$

Burada

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= 1 \\
q_1(x) &= (x - x_0) \\
q_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\
q_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\vdots \\
q_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

baz polinomlarıdır.

İnterpolasyon koşulları bilinmeyen c_j katsayılarını belirleyecek bir lineer denklem sistemine yol açarlar:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j q_j(x_i) = f(x_i) \qquad (0 \leq i \leq n) \tag{2}$$

Bu denklem sisteminde katsayı matrisi, $(n+1) \times (n+1)$ lik

$$a_{ij} = q_j(x_i) \qquad (0 \leq i, j \leq n) \tag{3}$$

elemanlı bir altüçgensel A matrisidir.

Örneğin, üç nodlu

$$\begin{aligned} p_2(x) &= c_0 q_0(x) + c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x) \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

durumunu göz önüne alalım. $x = x_0$, $x = x_1$ ve $x = x_2$ alırsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

alt üçgensel sistemini elde ederiz.

Denklem (2) den $c_0, c_1, ..., c_n$ leri çözmek için en üstten başlayarak, aşağı doğru c_j leri indislerinin verildiği sırayla hesaplayabiliriz. Bu süreçte c_0 ın sadece $f(x_0)$ a, c_1 in $f(x_0)$ ve $f(x_1)$ e v.s. bağlı olduklarını görmekteyiz. Böylece c_n, $x_0, x_1, ..., x_n$ noktalarında f ye bağlıdır. Bu bağı vurgulamak için yıllar önce

$$c_n = f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

gösterimi benimsenmiştir. Bu nedenle, $\sum_{k=0}^{n} c_k q_k$ nın f nin $x_0, x_1, ..., x_n$ deki interpolasyon polinomu olması durumunda, q_n nin katsayısını $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ sembolü ile *tanımlıyoruz ve* f nin **bölünmüş farkları** olarak adlandırıyoruz.

Newton interpolasyon polinomunu

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

formundadır. Burada $c_k = f[x_0, x_1, ..., x_k]$ katsayıları aşağıdaki teoremi sağlar:

Teorem (Yüksek-Basamaktan Bölünmüş Farklar)

Bölünmüş farklar

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

eşitliğini sağlar.

Teorem bize aşağıdaki özel durumları verir:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu formüllerde, $x_0, x_1, x_2, \ldots$ bağımsız değişkenler olarak yorumlanabilir. Bu nedenle,

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

şeklinde eşitliklere de sahip oluruz.

Eğer bir $(x_i, f(x_i))$ fonksiyon değerleri tablosu verilirse, bu durumda bunlardan bir bölünmüş farklar tablosu oluşturabiliriz. Bu, ardışık kolonlarda 0., 1., 2. ve 3. basamaktan farkların gösterildiği, alışılmış şekliyle aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{array}{cc|ccc} x_0 & f(x_0) & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ x_1 & f(x_1) & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & \\ x_2 & f(x_2) & f[x_2,x_3] & & \\ x_3 & f(x_3) & & & \end{array}$$

Örnek

x	3	1	5	6
$f(x)$	1	-3	2	4

fonksiyon değerleri için bölünmüş fark tablosunu hesaplayınız. İnterpolasyon polinomunu bulunuz:

Çözüm

$$
\begin{array}{cc|ccc}
3 & 1 & \frac{-3-1}{1-3} = 2 & \frac{5/4-2}{5-3} = -3/8 & \frac{3/20-(-3/8)}{6-3} = 7/40 \\
1 & -3 & \frac{2-(-3)}{5-1} = 5/4 & \frac{2-5/4}{6-1} = 3/20 & \\
5 & 2 & \frac{4-2}{6-5} = 2 & & \\
6 & 4 & & &
\end{array}
$$

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

Teorem (Newton İnterpolasyonunun Hatası)

p polinomu bir f fonksiyonunu $n+1$ tane farklı $x_0, x_1, ..., x_n$ nodlarında interpole eden, en fazla n. dereceden polinom olsun. Eğer t nodlardan farklı bir nokta ise, bu durumda

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, ..., x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$$

dır.

Teorem (Türevler ve Bölünmüş Farklar)

Eğer $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu n-kez sürekli türevlenebilir ise ve eğer $[a, b]$ de $x_0, x_1, ..., x_n$ farklı noktalar ise, bu durumda

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

olacak şekilde bir $\xi \in (a, b)$ vardır.