NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Denklemlerin Köklerini Bulma

- **lineer olmayan** denklemlerin veya lineer olmayan denklem sistemlerinin *çözümü*

Denklemlerin Köklerini Bulma

- **lineer olmayan** denklemlerin veya lineer olmayan denklem sistemlerinin *çözümü*
- Diğer bir deyişle, $f(x) = 0$ olacak şekilde x in bulunması veya $F(X) = 0$ olacak şekilde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ nin bulunması

Denklemlerin Köklerini Bulma

- **lineer olmayan** denklemlerin veya lineer olmayan denklem sistemlerinin *çözümü*
- Diğer bir deyişle, $f(x) = 0$ olacak şekilde x in bulunması veya $F(X) = 0$ olacak şekilde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ nin bulunması
- Bu denklemlerde, bir veya daha fazla değişken herhangi sayıda lineer olmayan bir yapıda olacaktır.

Denklemlerin Köklerini Bulma

- **lineer olmayan** denklemlerin veya lineer olmayan denklem sistemlerinin *çözümü*
- Diğer bir deyişle, $f(x) = 0$ olacak şekilde x in bulunması veya $F(X) = 0$ olacak şekilde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ nin bulunması
- Bu denklemlerde, bir veya daha fazla değişken herhangi sayıda lineer olmayan bir yapıda olacaktır.
- En basit reel değişkenli reel değerli durum için genel problem:

Denklemlerin Köklerini Bulma

- **lineer olmayan** denklemlerin veya lineer olmayan denklem sistemlerinin *çözümü*
- Diğer bir deyişle, $f(x) = 0$ olacak şekilde x in bulunması veya $F(X) = 0$ olacak şekilde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ nin bulunması
- Bu denklemlerde, bir veya daha fazla değişken herhangi sayıda lineer olmayan bir yapıda olacaktır.
- En basit reel değişkenli reel değerli durum için genel problem:
  - Verilen bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ olacak şekilde x değerlerini bulunuz.

Denklemlerin Köklerini Bulma

- **lineer olmayan** denklemlerin veya lineer olmayan denklem sistemlerinin *çözümü*
- Diğer bir deyişle, $f(x) = 0$ olacak şekilde x in bulunması veya $F(X) = 0$ olacak şekilde $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ nin bulunması
- Bu denklemlerde, bir veya daha fazla değişken herhangi sayıda lineer olmayan bir yapıda olacaktır.
- En basit reel değişkenli reel değerli durum için genel problem:
  - Verilen bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ olacak şekilde x değerlerini bulunuz.
  - x : denklemin **kökü** veya fonksiyonun **sıfırı** demektir.

- Işığın yayılımı teorisinde

$$x - \tan x = 0$$

denkleminin köklerine gereksinim duyarız

- Işığın yayılımı teorisinde

$$x - \tan x = 0$$

denkleminin köklerine gereksinim duyarız

- Gezegensel yörüngeler hesabında, a ve b nin değişik değerleri için,

$$x - a \sin x = b$$

Kepler denkleminin köklerine gereksinim duymaktayız.

- Işığın yayılımı teorisinde

$$x - \tan x = 0$$

  denkleminin köklerine gereksinim duyarız
- Gezegensel yörüngeler hesabında, a ve b nin değişik değerleri için,

$$x - a \sin x = b$$

  Kepler denkleminin köklerine gereksinim duymaktayız.
- Fonksiyonların sıfırlarını belirleme, birkaç yüzyıldan beri aktif bir çalışma alanı olduğu için, sayısız yöntem geliştirilmiştir. Bu bölümde, oldukça kullanışlı olan üç yöntem ile başlayacağız: **Yarılama yöntemi**, **Newton yöntemi** ve **kiriş yöntemi**.

Yarılama (İkiye bölme) yöntemi

1. Eğer f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda f fonksiyonu (a, b) de bir sıfıra sahip olmak zorundadır. $f(a)f(b) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu $[a, b]$ de işaret değiştirir ve böylece, aralığın içinde en az bir sıfıra sahiptir. Bu Ortalama-Değer Teoreminin bir sonucudur.

Yarılama (İkiye bölme) yöntemi

1. Eğer f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda f fonksiyonu (a, b) de bir sıfıra sahip olmak zorundadır. $f(a)f(b) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu $[a, b]$ de işaret değiştirir ve böylece, aralığın içinde en az bir sıfıra sahiptir. Bu Ortalama-Değer Teoreminin bir sonucudur.
2. Yarılama yöntemi bu sonucu şu şekilde kullanır:

Yarılama (İkiye bölme) yöntemi

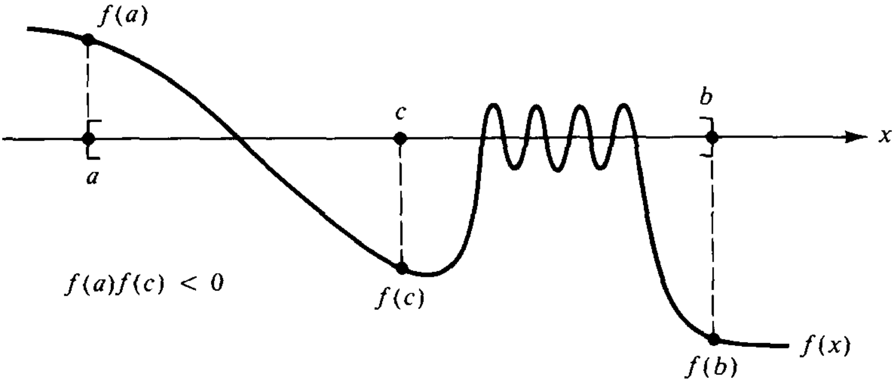
1. Eğer f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a)f(b)<0$ ise, bu durumda f fonksiyonu (a,b) de bir sıfıra sahip olmak zorundadır. $f(a)f(b)<0$ olduğundan, f fonksiyonu $[a,b]$ de işaret değiştirir ve böylece, aralığın içinde en az bir sıfıra sahiptir. Bu Ortalama-Değer Teoreminin bir sonucudur.
2. Yarılama yöntemi bu sonucu şu şekilde kullanır:
   1. $f(a)f(b)<0$ ise, bu durumda $c=\frac{1}{2}(a+b)$ yi hesaplayıp, $f(a)f(c)<0$ olup olmadığını test ederiz. Eğer bu doğru ise, bu durumda f, $[a,c]$ de bir sıfıra sahiptir. Böylece c yi yeniden b olarak adlandırıp, orjinal aralığın yarısı uzunluğunda olan yeni $[a,b]$ aralığı ile tekrar başlarız.

Yarılama (İkiye bölme) yöntemi

1. Eğer f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda f fonksiyonu (a, b) de bir sıfıra sahip olmak zorundadır. $f(a)f(b) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu $[a, b]$ de işaret değiştirir ve böylece, aralığın içinde en az bir sıfıra sahiptir. Bu Ortalama-Değer Teoreminin bir sonucudur.
2. Yarılama yöntemi bu sonucu şu şekilde kullanır:
    1. $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda $c = \frac{1}{2}(a + b)$ yi hesaplayıp, $f(a)f(c) < 0$ olup olmadığını test ederiz. Eğer bu doğru ise, bu durumda f, $[a, c]$ de bir sıfıra sahiptir. Böylece c yi yeniden b olarak adlandırıp, orjinal aralığın yarısı uzunluğunda olan yeni $[a, b]$ aralığı ile tekrar başlarız.
    2. $f(a)f(c) > 0$ ise, bu durumda $f(c)f(b) < 0$ olup, bu kez c yi yeni a olarak alırız.

Yarılama (İkiye bölme) yöntemi

1. Eğer f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda f fonksiyonu (a, b) de bir sıfıra sahip olmak zorundadır. $f(a)f(b) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu $[a, b]$ de işaret değiştirir ve böylece, aralığın içinde en az bir sıfıra sahiptir. Bu Ortalama-Değer Teoreminin bir sonucudur.
2. Yarılama yöntemi bu sonucu şu şekilde kullanır:
    1. $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda $c = \frac{1}{2}(a + b)$ yi hesaplayıp, $f(a)f(c) < 0$ olup olmadığını test ederiz. Eğer bu doğru ise, bu durumda f, $[a, c]$ de bir sıfıra sahiptir. Böylece c yi yeniden b olarak adlandırıp, orjinal aralığın yarısı uzunluğunda olan yeni $[a, b]$ aralığı ile tekrar başlarız.
    2. $f(a)f(c) > 0$ ise, bu durumda $f(c)f(b) < 0$ olup, bu kez c yi yeni a olarak alırız.
    3. $f(a)f(c) = 0$ ise, bu durumda $f(c) = 0$ olup, sıfır bulunmuş olur.


$f(a)$
b
c
x
a
$f(a)f(c) < 0$
$f(c)$
$f(x)$
$f(b)$

Yuvarlama hataları nedeniyle, $f(c)$ nin bilgisayarda kesin 0 olması çok küçük ihtimaldir. Bu nedenle, **durma kriteri** $f(c) = 0$ *olmamalıdır*. Kabul edilebilir bir tolerans, örneğin `Marc-32` de $f(c) < 10^{-5}$ gibi, verilmelidir. Yarılama yöntemi aralığı **ikiye bölme yöntemi** olarak da bilinir.

Yarılama algoritması aşağıdaki gibi verilebilir:

girdi $a, b, M, \delta, \varepsilon$

$u \leftarrow f(a)$; $v \leftarrow f(b)$; $\quad e \leftarrow b - a$

çıktı a, b, u, v

eğer $\operatorname{sign}(u) = \operatorname{sign}(v)$ **ise dur**

$k = 1$ **den** M **ye döngü**

  $e \leftarrow e/2$; $c \leftarrow a + e$; $w \leftarrow f(c)$

  çıktı k, c, w, e

  eğer $|e| < \delta$ veya $|w| < \varepsilon$ **ise dur**

  eğer $\operatorname{sign}(w) \neq \operatorname{sign}(u)$ **ise**

    $b \leftarrow c$

    $v \leftarrow w$

  değilse

    $a \leftarrow c$

    $u \leftarrow w$

  koşul sonu

döngü sonu

Örnek

$e^x = \sin x$ denkleminin 0 a en yakın kökünü bulmak için yarılama yöntemini kullanınız.

Çözüm

$f(x) = e^x - \sin x$ *in bir kökü* $[-4, -3]$ *aralığındadır.* $[-4, -3]$ *aralığından başlanırsa, aşağıdaki çıktı üretilir:*

k	c	$f(c)$
1	-3.5000	-3.321
2	-3.2500	-0.694×10^{-1}
3	-3.1250	-0.605×10^{-1}
4	-3.1875	-0.625×10^{-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	-3.1829	-0.122×10^{-3}
14	-3.1830	-0.193×10^{-4}
15	-3.1831	-0.124×10^{-4}
16	-3.1831	-0.345×10^{-5}

Teorem (Yarılama Yöntemi)

Eğer $[a_0, b_0], [a_1, b_1], ..., [a_n, b_n], ...$ *yarılama yöntemindeki aralıkları belirtiyorsa, bu durumda* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *ve* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *vardır, eşittir, ve f nin bir sıfırını temsil ederler. Eğer* $r = \lim_{n\to\infty} c_n$ *ve* $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ *ise, bu durumda*

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

dır.

Örnek

Yarılama yönteminin $[50, 63]$ aralığı ile başladığını kabul edelim. Bir parçada 10^{-12} bağıl duyarlılıkla bir kökü hesaplamak için kaç adım alınmalıdır?

Çözüm

Bağıl duyarlılık için istenen koşuldan

$$|r - c_n| \,/\, |r| \leq 10^{-12}$$

olmalıdır. $r \geq 50$ *olduğunu bildiğimizden,*

$$|r - c_n| \,/ 50 \leq 10^{-12}$$

eşitsizliğini sağlamak yeterlidir. Teorem 1 den, aşağıdaki koşulun gerçeklenmesi gerektiği sonucunu çıkarırız:

$$2^{-(n+1)} \times (13/50) \leq 10^{-12}$$

Bu eşitsizliği n *için çözerek,* $n \geq 37$ *buluruz.*■