NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Lineer Programlama

Lineer programlama terimi bir bilgisayar programlamasını değil, ticari veya ekonomik kurum planlamasını kastetmektedir. İfadeye açık ve teknik bir anlam yüklenmektedir: Anlamı, $\mathbb{R}^n$ de bir konveks çokyüzlü küme üzerinden n reel değişkenli bir lineer fonksiyonun maksimumunu bulmaktır. Böyle bir problem için aşağıdaki standart formu kullanacağız.
(*Eğer bir lineer uzayın bir K alt kümesindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası tamamen K içinde kalıyorsa, K ya* **konveks** *denir.*)
Yüksek hızlara sahip digital bilgisayarın geliştirilmesi, karar verme biliminin gelişmesinde ayrıca önemli bir rol oynamış olup, aynı zamanda uygulamalı matematikte de bir devrim yaratmıştır. Karar verme problemlerinin formülasyonu için temel yaklaşımda, en iyi ya da optimal karar kavramının oluşması doğaldır. Bu tür bir yaklaşımda, performans veya bir kararın değerini özetleyen tek bir reel nicelik, değişik alternatifler içinden yalıtılarak, duruma göre ya minimize ya da maksimize yani optimize edilir. Ortaya çıkan optimal karar, karar verme probleminin çözümü olarak alınır. Aşağıdaki problem bu türden bir probleme örnektir.

Örnek

Bir üreticinin ham madde envanterini göz önüne alalım. Üretici, ham maddelerden n farklı tip ürün elde edebilen üretici araca sahip olsun. Üreticinin problemi, kazancını maksimum yapacak şekilde, ham maddelerini olası ürünlerine göre ayarlamasıdır. Problemin ideal şekliyle, üretim ve kazanç modelinin lineer olduğunu kabul edelim. Her bir j ürününün birim satış fiatı c_j, $j = 1, 2, \ldots n$ olsun. Eğer x_j, j ürününün üretilecek miktarını, b_i , halihazırdaki i ham maddesinin miktarını, ve a_{ij}, bir birim j ürünündeki i maddesinin miktarını gösterirse bu durumda üretici, ham maddelerin miktarı üzerindeki üretim kısıtları $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ ve

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned}
$$

üzerinden $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$ toplam kazancını maksimum yapmaktır.

LP PROBLEMİ 1 Lineer Programlama Problemi: İlk Standart Form
$c \in R^n$, $b \in R^m$ ve $A \in R^{m\times n}$ olsun. $x \in R^n$, $Ax \leq b$, ve $x \geq 0$ kısıtlaları altında $c^T x$ in maksimum değerini bulunuz.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ ise, bu durumda $x \geq 0$ vektör eşitsizliğinin anlamının, her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_i \geq 0$ olduğunu hatırlatalım. Benzer şekilde,

$$Ax \leq b$$

eşitsizliğinin anlamı;

$$\text{her} \quad i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \text{için} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

olması demektir.

Şimdi, ortak olarak kullanılan bazı terminolojiden bahsedelim. Problemimizin **uygun kümesi**

$$K = \{x \in R^n \ : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\}$$

kümesidir. *Problemin değeri*

$$v = \sup\left\{c^T x \ : \ x \in K\right\}$$

sayısıdır. Bir **uygun nokta** K nın herhangi bir elemanıdır. Bir **çözüm** veya bir **optimal uygun nokta** $c^T x = v$ olacak şekildeki herhangi bir $x \in K$ noktasıdır. $x \longmapsto c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ fonksiyonu **amaç** (objektif) **fonksiyonudur.** Problemi A, b, ve c verileri ile tam olarak belirlendiğinden dolayı, onu (A, b, c) lineer programlama problemi olarak ifade ediyoruz.

Değişkenleri lineer eşitsizlik kısıtları olan bir lineer fonksiyonun optimizasyonunu içeren hemen hemen bütün problemler, lineer programlama formatı ile verilebilir. Bunun için çoğu zaman aşağıdaki fikirlerden bir veya birkaçına gereksinim vardır:

1. Eğer $c^T x$ i minimum yapmak istiyorsak, bu $-c^T x$ i maksimum yapmak ile aynıdır.
2. $a^T x \geq \beta$ formundaki herhangi bir kısıt, $-a^T x \leq -\beta$ ya denktir.
3. $a^T x = \beta$ formundaki herhangi bir kısıt, $a^T x \leq \beta$ ve $-a^T x \leq -\beta$ ya denktir.
4. $\left|a^T x\right| \leq \beta$ formundaki herhangi bir kısıt, $a^T x \leq \beta$ ve $-a^T x \leq \beta$ ya denktir.
5. Eğer amaç fonksiyonu artı bir sabiti içeriyorsa, bu sabitin çözümde hiçbir etkisi yoktur. Böylece, $c^T x + \beta$ nın maksimumu, $c^T x$ in maksimumu ile aynı noktada oluşur.
6. Eğer verilen bir problem bir x_j değişkeninin negatif olmama koşuluna gereksinim duymuyorsa, x_j yi $x_j = u_j - v_j$ şeklinde negatif olmayan iki değişkenin farkı olarak ifade edebiliriz.

Örnek

Bu problemi standart formda bir lineer programlama problemine dönüştürünüz:

$$\text{Minimum:} \quad 7x_1 - x_2 + x_3 - 4$$

$$\text{Kısıtlar:} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ |x_1 - 2x_2 + 3x_3| \leq 5 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Çözüm

$u_1 = x_1, \; u_2 = -x_2$ ve $u_3 - u_4 = x_3$ *alalım. Böylece*

$$\begin{array}{rl} \textit{Maksimum:} & -7u_1 - u_2 - u_3 + u_4 \\ \textit{Kısıtlar:} & \left\{ \begin{array}{l} -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \leq -2 \\ 3u_1 - 4u_2 + u_3 - u_4 \leq 6 \\ -3u_1 + 4u_2 - u_3 + u_4 \leq -6 \\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 - 3u_4 \leq 5 \\ -u_1 - 2u_2 - 3u_3 + 3u_4 \leq 5 \\ u_1 \geq 0, \; u_2 \geq 0, \; u_3 \geq 0, \; u_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

elde ederiz.

Herhangi bir $(A, \ b, \ c)$ lineer programlama problemi ile $(-A^T, \ -c, -b)$ şeklinde bir başka problemi ilişkilendirilebiliriz. Bu probleme orijinal problemin **duali** denir. Örneğin,

$$\text{Maksimum:} \qquad 3x_1 - 2x_2$$

$$\text{Kısıtlar} \quad : \quad \begin{cases} 7x_1 + x_2 \leq 18 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ 6x_1 - x_2 \leq 13 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

probleminin duali

$$\text{Maksimum:} \qquad -18y_1 - 25y_2 - 13y_3$$

$$\text{Kısıtlar} \quad : \quad \begin{cases} -7y_1 + 3y_2 - 6y_3 \leq -3 \\ -y_1 - 5y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Teorem (İlk Lineer Programlama ve Dual Problem Teoremi)

Eğer x, bir (A, b, c) lineer programlama problemi için bir uygun nokta, ve y de $(-A^T, -c, -b)$ dual problemi için bir uygun nokta ise, bu durumda

$$c^T x \leq y^T Ax \leq b^T y$$

dir. Eğer burada eşitlik oluşursa, bu durumda x ve y karşılık gelen problemlerin çözümleridir.

İspat

x ve y noktaları

$$x \geq 0, \quad Ax \leq b, \quad y \geq 0, \quad -A^T y \leq -c$$

eşitsizliklerini sağlarlar. Buradan,

$$c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T A x \leq y^T b = b^T y$$

elde ederiz. Böylece iki problemde v_1 ve v_2 değerleri

$$\begin{aligned} c^T x &\leq v_1 \leq b^T y \\ -b^T y &\leq v_2 \leq -c^T x \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlamak zorundadırlar. Eğer, $c^T x = b^T y$ ise $c^T x = v_1 = b^T y = -v_2$ olduğu açıktır.

Teorem (İkinci Lineer Programlama ve Dual Problem Teoremi)

Eğer bir lineer programlama problemi ve duali uygun noktalara sahipseler, bu durumda her iki problem de, biri diğerinin negatifi olan çözüme sahiptir.

Teorem (Üçüncü Lineer Programlama ve Dual Problem Teoremi)

Bir lineer programlama problemi ya da duali eğer bir çözüme sahipse, bu durumda diğeri de bir çözüme sahiptir.

Teorem (Uygun Noktalar)

x ve y, sırası ile, bir lineer programlama problemi ve duali için uygun noktalar olsunlar. Bu noktalar karşılık gelen problemlerinin çözümleridir ancak ve ancak $y_i > 0$ olacak şekildeki her i indisi için $(Ax)_i = b_i$, ve $x_i > 0$ olacak şekildeki her i indisi için $(A^T y)_i = c_i$ dir.