NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Fark Denklemleri

V, kompleks sayıların

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, x_3, \ldots] \\ y &= [y_1, y_2, y_3, \ldots] \end{aligned}$$

gibi, tüm sonsuz dizilerinin kümesini temsil etsin. Tüm pozitif tamsayıların $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinde tanımlı kompleks-değerli bir fonksiyonuna bir dizi denir. Uygunluk açısından, x fonksiyonunun n argümentindeki değeri için $x(n)$ yerine x_n yazmaktayız.
V kümesinde iki operatör tanımlayalım:

$$\begin{aligned} x + y &= [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots] \\ \lambda x &= [\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots] \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri daha kompakt formda

$$\begin{aligned} (x + y)_n &= x_n + y_n \\ (\lambda x)_n &= \lambda x_n \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. V de bir $0 = [0, 0, 0, \ldots]$ elemanı mevcuttur. Bu tanımlar altında V bir **vektör uzay** olur.

V vektör uzayı sonsuz boyutludur; gerçekten, aşağıdaki vektörler kümesi lineer bağımsızdır:

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= [1, 0, 0, 0, \ldots] \\ v^{(2)} &= [0, 1, 0, 0, \ldots] \\ v^{(3)} &= [0, 0, 1, 0, \ldots] \\ v^{(4)} &= [0, 0, 0, 1, \ldots] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$L : V \longrightarrow V$ lineer operatörleri ile ilgileneceğiz. Bunların en önemlilerinden birisi E ile gösterilen ve $x = [x_1, x_2, x_3, \ldots]$ olmak üzere

$$Ex = [x_2, x_3, x_4, \ldots]$$

ile tanımlanan **kaydırma operatörü** veya y**er değiştirme operatörüdür**. Böylece

$$(Ex)_n = x_{n+1}$$

dir. Açık olarak, $(EEx)_n = x_{n+2}$ veya $(E^k x)_n = x_{n+k}$

E nin kuvvetlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilebilen lineer operatör (sabit katsayılı ve sonlu ranklı) bir **lineer fark operatörü** olarak adlandırılır. Bu tip bir operatörün genel formu

$$L = \sum_{i=0}^{m} c_i E^i \tag{1}$$

şeklindedir. Kuşkusuz, E^0

$$(E^0 x)_n = (Ix)_n = x_n$$

ile tanımlı **birim operatör**dür. Eşitlik (1) den, (1) formundaki bir lineer operatörün V den V ye tüm lineer operatörlerin kümesinde bir **lineer altuzay** meydana getirdiğini görebiliriz. E nin kuvvetleri bu alt uzay için bir **baz** oluşturur.

Eşitlik (1) deki L nin E ye göre *bir polinom* olduğuna dikkat edelim; diğer bir deyişle, L, E nin kuvvetlerinin bir lineer birleşimidir. Böylece,

$$L = p(E)$$

yazabiliriz. Burada p, L nin **karakteristik polinomu** olarak adlandırılır ve

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda^i$$

ile tanımlanır.

L nin lineerliğinden, $\{x : Lx = 0\}$ kümesinin V nin bir altuzayı olduğu hemen görülür ki; buna L nin **sıfır (null) uzayı** denir. Eğer L sıfır uzayı için bir baz bulunabilirse, $Lx = 0$ denklemini çözülebilir olarak görebiliriz.

Genel olarak ne beklediğimizi görmek için, $c_0 = 2, c_1 = -3, c_2 = 1$ ve diğer tüm c_i lerin sıfır olduğu, L nin somut bir durumunu göz önüne alalım. Ortaya çıkan denklem, ki bir **lineer fark denklemi** olarak bilinir,

$$\begin{aligned} (E^2 - 3E^1 + 2E^0)x &= 0 \\ x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n &= 0 \quad (n \geq 1) \\ p(E)x &= 0 \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{aligned} \tag{2}$$

şeklinde üç formda yazılabilir. (2) yi çözen diziler oluşturmak oldukça kolaydır. Gerçekten, x_1 ve x_2 yi isteksel seçip, daha sonra (2) den $x_3, x_4, \ldots$ belirlenebilir. Bu şekilde, örneğin

$$[1, 0, -2, -6, -14, -30, \ldots]$$
$$[1, 1, 1, 1, \ldots]$$
$$[2, 4, 8, 16, \ldots]$$

gibi, değişik çözümler elde edebiliriz.

İlk çözüm sonraki iki çözümden daha gizemlidir, çünkü genel teriminin ne olduğu ilk etapta belli değildir. Sonraki iki çözüm, $\lambda = 1$ veya 2 olmak üzere, açıkça $x_n = \lambda^n$ formundadır. Bu tipten başka çözümlerin var olup olmadığını sorgulamak doğaldır. (2) de $x_n = \lambda^n$ yazarsak

$$\begin{aligned} \lambda^{n+2} - 3\lambda^{n+1} + 2\lambda^n &= 0 \\ \lambda^n(\lambda^2 - 3\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda^n(\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Basit bir analiz, aynı tipten sadece bir tane daha çözüm olduğunu gösterir ki bu $[0, 0, 0, ...]$ dır. Bu çözüme **aşikar çözüm** diyoruz.

Böylece, $u_n = 1$ ile tanımlı u ve $v_n = 2^n$ ile tanımlı v çözümleri, (2) nin çözüm uzayı için bir baz oluştururlar. Bunu ispatlamak için, kabul edelim ki x, (2) nin **herhangi bir çözümü** olsun. $x = \alpha u + \beta v$ olacak şekilde α ve β sabitleri arıyoruz. Bu eşitliğin anlamı, her n için $x_n = \alpha u_n + \beta v_n$ demektir. Özel olarak, $n = 1$ ve 2 için

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = \alpha + 4\beta \end{cases} \tag{3}$$

dır. Denklem (3) α ve β yı tek olarak belirler, çünkü katsayı matrisinin determinantı 0 değildir. Şimdi tümevarımla her n için $x_n = \alpha u_n + \beta v_n$ olduğunu ispatlayabiliriz: Eğer eşitlik n den küçük her indis için doğru ise, bu durumda n için de doğrudur, çünkü

$$\begin{aligned} x_n &= 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \\ &= 3(\alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}) - 2(\alpha u_{n-2} + \beta v_{n-2}) \\ &= \alpha(3u_{n-1} - 2u_{n-2}) + \beta(3v_{n-1} - 2v_{n-2}) \\ &= \alpha u_n + \beta v_n \end{aligned}$$

Bu örnek karakteristik polinomun "basit kökler" durumunu göstermektedir.

Teorem (Sıfır Uzayı Teoremi)

Eğer p bir polinom ve λ da p nin bir kökü ise, bu durumda $p(E)x = 0$ denkleminin bir çözümü $[\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...]$ dır. Eğer p nin tüm kökleri basit ve sıfırdan farklı ise, bu durumda fark denkleminin herbir çözümü bu tip özel çözümlerin bir lineer birleşimidir.

Teorem (Sıfır Uzayının Bazı için Teorem)

$p(0) \neq 0$ olmak üzere p nin bir polinom olduğunu varsayalım. Bu durumda $p(E)$ nin sıfır uzayının bir bazı şu şekilde elde edilebilir: p nin k-katlı herbir λ köküne, $x(\lambda) = [\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...]$ olmak üzere, k tane $x(\lambda), x'(\lambda), ..., x^{(k-1)}(\lambda)$ temel çözümü karşılık getirilir.

p, katlı köklere sahipken, $p(E)x = 0$ denklemini çözelim.
$x(\lambda) = [\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...]$ tanımlayalım. Eğer, p herhangi bir polinom ise,

$$p(E)x(\lambda) = p(\lambda)x(\lambda)$$

olduğunu görmüştük. λ ya göre türev alırsak

$$p(E)x'(\lambda) = p'(\lambda)x(\lambda) + p(\lambda)x'(\lambda)$$

elde ederiz. Eğer λ, p nin katlı bir kökü ise, bu durumda $p(\lambda) = p'(\lambda) = 0$ olup, Böylece $x(\lambda)$ ve $x'(\lambda)$ fark denkleminin çözümleridir. Böylece, bir çözüm $x'(\lambda) = [1, 2\lambda, 3\lambda^2, ...]$ dizisidir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise,

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{bmatrix} \neq 0$$

olduğundan, bu, $x(\lambda)$ çözümünden bağımsızdır ve böylece, eğer diziler ikinci terimde kesilirlerse, $\mathbb{R}^2$ deki geriye kalan vektör çiftleri lineer bağımsızdır.

Bu nedenlemeyi genişleterek; p nin k katlı bir kökü λ olmak üzere aşağıdaki dizilerin $p(E)x = 0$ fark denkleminin çözümleri olduğunu ispatlayabiliriz:

$$
\begin{aligned}
x(\lambda) &= [\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...] \\
x'(\lambda) &= [1, 2\lambda, 3\lambda^2, ...] \\
x''(\lambda) &= [0, 2, 6\lambda, ...] \\
&\vdots \\
x^{(k-1)}(\lambda) &= \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}[\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...]
\end{aligned}
$$

Örnek

$$4x_n + 7x_{n-1} + 2x_{n-2} - x_{n-3} = 0$$

fark denkleminin genel çözümünü belirleyiniz.

Çözüm

Verilen denklem $p(\lambda) = 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 2\lambda - 1$ *olmak üzere* $p(E)x = 0$ *formundadır.* p *nin çarpanları* $(\lambda + 1)^2$ *ve* $(4\lambda - 1)$ *dir. O halde,* p *iki katlı* -1 *köküne ve* $-1/4$ *basit köküne sahiptir. Temel çözümler*

$$\begin{aligned} x(-1) &= [-1, 1, -1, 1, \ldots] \\ x'(-1) &= [1, -2, 3, -4, \ldots] \\ x(\tfrac{1}{4}) &= [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{64}, \ldots] \end{aligned}$$

olup, genel çözüm $x = \alpha x(-1) + \beta x'(-1) + \gamma x(\frac{1}{4})$ *veya*
$x_n = \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^{n-1} + \gamma(\frac{1}{4})^n$ *dir.*

Eğer her n için $|x_n| \leq c$ olacak şekilde bir c sabiti varsa, veya diğer bir deyişle, $\sup_n |x_n| < \infty$ ise, V nin bir $x = [x_1, x_2, ...]$ elemanına **sınırlıdır** denir. Eğer $p(E)x = 0$ formundaki bir fark denkleminin tüm çözümleri sınırlı ise, denkleme **kararlıdır** denir. (2) fark denklemi kararlı değildir, çünkü çözümlerinden biri $x_n = 2^n$ ile verilmektedir.

Teorem (Kararlı Fark Denklemleri için Teorem)

$p(0) \neq 0$ olan bir p polinomu için aşağıdaki özellikler denktir:

1. *$p(E)x = 0$ denklemi kararlıdır.*
2. *p nin tüm kökleri $|z| \leq 1$ i; tüm katlı kökleri $|z| < 1$ i sağlar.*

Örnek

$$4x_n + 7x_{n-1} + 2x_{n-2} - x_{n-3} = 0$$

fark denkleminin kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

Verilen denklem $p(\lambda) = 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 2\lambda - 1$ *olmak üzere* $p(E)x = 0$ *formundadır. Önceki örnekten,* p *iki katlı* -1 *köküne ve* $-1/4$ *basit köküne sahiptir. O halde denklem* **kararsızdır**.

Programlama ödevi: S 36. problem 1.3