NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

SAYISAL İNTEGRAL

Ardışık Yamuk Kuralı

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

için, $h = (b-a)/n$ uzunluklu n altaralık kullanan yamuk kuralını $T(n)$ ile gösterirsek

$$T(n) = h\sum_{i=0}^{n} f(a+ih) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n}{}'' f\left(a+i\frac{(b-a)}{n}\right) \tag{2}$$

eşitliğine sahibiz. Burada, toplam işaretindeki çift üs, ilk ve son terimlerin *yarısının* alınacağını belirtmektedir.

Örnek

Aralığın $[0,1]$ olması durumunda $T(1)$, $T(2)$, $T(4)$ ve $T(8)$ için açık formüller nelerdir?

Çözüm

Denklem (2) yi kullanarak

$$\begin{aligned}
T(1) &= \tfrac{1}{2}f(0) + \tfrac{1}{2}f(1) \\
T(2) &= \tfrac{1}{4}f(0) + \tfrac{1}{2}\left[f(\tfrac{1}{2})\right] + \tfrac{1}{4}f(1) \\
T(4) &= \tfrac{1}{8}f(0) + \tfrac{1}{4}\left[f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{4})\right] + \tfrac{1}{8}f(1) \\
T(8) &= \tfrac{1}{16}f(0) + \tfrac{1}{8}\left[f(\tfrac{1}{8}) + f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{3}{8}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{5}{8})\right. \\
&\quad \left. + f(\tfrac{3}{4}) + f(\tfrac{7}{8})\right] + \tfrac{1}{16}f(1)
\end{aligned}$$

- $T(2n)$ hesabında, $T(n)$ hesabını kullanabiliriz.

Örnek

Aralığın $[0,1]$ olması durumunda $T(1)$, $T(2)$, $T(4)$ ve $T(8)$ için açık formüller nelerdir?

Çözüm

Denklem (2) yi kullanarak

$$\begin{aligned}
T(1) &= \tfrac{1}{2}f(0) + \tfrac{1}{2}f(1) \\
T(2) &= \tfrac{1}{4}f(0) + \tfrac{1}{2}\left[f(\tfrac{1}{2})\right] + \tfrac{1}{4}f(1) \\
T(4) &= \tfrac{1}{8}f(0) + \tfrac{1}{4}\left[f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{4})\right] + \tfrac{1}{8}f(1) \\
T(8) &= \tfrac{1}{16}f(0) + \tfrac{1}{8}\left[f(\tfrac{1}{8}) + f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{3}{8}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{5}{8})\right. \\
&\quad \left. + f(\tfrac{3}{4}) + f(\tfrac{7}{8})\right] + \tfrac{1}{16}f(1)
\end{aligned}$$

- $T(2n)$ hesabında, $T(n)$ hesabını kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} T(2) &= \tfrac{1}{2}T(1) + \tfrac{1}{2}\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] \\ T(4) &= \tfrac{1}{2}T(2) + \tfrac{1}{4}\left[f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right)\right] \\ T(8) &= \tfrac{1}{2}T(4) + \tfrac{1}{8}\left[f\left(\tfrac{1}{8}\right) + f\left(\tfrac{3}{8}\right) + f\left(\tfrac{5}{8}\right) + f\left(\tfrac{7}{8}\right)\right] \end{aligned}$$

ve genel olarak $h = (b-a)/2n$ ile, herhangi bir $[a,b]$ aralığına ait genel formül şu şekildedir:

$$\begin{aligned} T(2n) &= \frac{1}{2}T(n) + h\left[f(a+h) + f(a+3h) + f(a+5h)\right. \\ &\qquad \left. + \cdots + f(a+(2n-1)h)\right] \\ &= \frac{1}{2}T(n) + h\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(2i-1)h\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

Eğer 2^n tane düzgün altaralık var ise, bu durumda (3) eşitliği bir ardışık yamuk kuralı sağlar:

$$h_0 = b - a \qquad h_n = h_{n-1}/2 \qquad (n \geq 1)$$

olmak üzere,

$$T(2^n) = \frac{1}{2} T(2^{n-1}) + h_n \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(a + (2i-1)h_n\right)$$

elde edilir.

Romberg Algoritması

- 2^n altaralıklı yamuk tahmini $R(n,0)$ ile gösterilmek üzere;

Romberg Algoritması

- 2^n altaralıklı yamuk tahmini $R(n,0)$ ile gösterilmek üzere;
- $$\begin{cases} R(0,0) = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right] \\ R(n,0) = \dfrac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \displaystyle\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(a+(2i-1)h_n\right) \end{cases} \tag{4}$$

Romberg Algoritması

- 2^n altaralıklı yamuk tahmini $R(n,0)$ ile gösterilmek üzere;
- $$\begin{cases} R(0,0) = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right] \\ R(n,0) = \dfrac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \displaystyle\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(a+(2i-1)h_n\right) \end{cases} \qquad (4)$$
- $R(n,m) = R(n,m-1) + \dfrac{1}{4^m-1}\left[R(n,m-1) - R(n-1,m-1)\right]$

Romberg Algoritması

- 2^n altaralıklı yamuk tahmini $R(n,0)$ ile gösterilmek üzere;
- $$\begin{cases} R(0,0) = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right] \\ R(n,0) = \dfrac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \displaystyle\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(a+(2i-1)h_n\right) \end{cases} \quad (4)$$
- $R(n,m) = R(n,m-1) + \dfrac{1}{4^m-1}\left[R(n,m-1) - R(n-1,m-1)\right]$
- $R(n,m)$ $(n \geq 1, m \geq 1)$ formülünün türev için $D(n,m)$ dış kestirim formülü ile aynı olduğuna dikkat ediniz.

$$
\begin{array}{ccccccc}
R(0,0) & & & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & & & \\
R(4,0) & R(4,1) & R(4,2) & R(4,3) & R(4,4) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R(M,0) & R(M,1) & R(M,2) & R(M,3) & R(M,4) & \cdots & R(M,M)
\end{array}
$$

Teorem (Romberg Algoritmasının Yakınsaklığı)

Eğer $f \in C[a, b]$ ise, bu durumda Romberg dizisindeki herbir kolon f nin integraline yakınsar. Böylece her m için,

$$\lim_{n \to \infty} R(n, m) = \int_a^b f(x)dx$$

İspat

İlk kolon için k altaralıklı yamuk kuralı

$$h\sum_{i=0}^{k}{}'' f(a+ih) = \frac{1}{2}h\sum_{i=0}^{k-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{k} f(a+ih)$$

formunda yazılabilir ki sağ taraf I için iki Riemann toplamının ortalamasını temsil etmekte olup, Riemann integrali teorisinden, her iki Riemann toplamı ve böylece ortalamaları da I ya yakınsar. Bu, $\lim_{n\to\infty} R(n,0) = I$ *olduğunu ispatlar. İkinci kolon için*

$$R(n,1) = \frac{4}{3}R(n,0) - \frac{1}{3}R(n-1,0)$$

olup, buradan $\lim_{n\to\infty} R(n,1) = \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}I = I$ *olur. Geriye kalan tüm kolonlar aynı yolla analiz edilir.* ■

Uyarlamalı Tümleme

Simpson kuralı

$$\int_a^b f(x)dx = S(a,b) - \frac{1}{90}\left[(b-a)/2\right]^5 f^{(4)}(\xi) \qquad (1)$$

$$S(a,b) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \qquad (2)$$

Ana fikir; eğer Simpson kuralı verilen bir alt aralıkta yeterince duyarlı değilse, bu durumda o alt aralığın iki eşit parçaya bölünmesi ve herbir parçada Simpson kuralının kullanılmasıdır. Bu süreç, içerilen tüm alt aralıklarda aynı duyarlılıkla integral yaklaşımı elde etmek için tekrarlanacaktır.

En sonunda, Simpson kuralının n kez uygulanması ile

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^n (S_i + e_i) = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{i=1}^n e_i$$

integralini hesaplamış olacağız. Burada S_i integrale $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında bir yaklaşım ve e_i de karşılık gelen *yerel* hatadır. Eğer

$$|e_i| \leq \varepsilon(x_i - x_{i-1})/(b-a) \tag{3}$$

ise, *toplam* hata

$$\left|\sum_{i=1}^n e_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |e_i| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

ile sınırlı olacaktır. O halde, *yerel* hata kriteri, bir

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n S_i\right| \leq \varepsilon$$

mutlak hata sınırlamasını doğurur.

(2) eşitliğinden, $[u, v]$ aralığındaki temel Simpson kuralı, bazı $\xi_1 \in (u, v)$ için,

$$\int_u^v f(x)dx = S(u, v) - \frac{1}{90}\left[(v-u)/2\right]^5 f^{(4)}(\xi_1) \tag{4}$$

ile verilir. Eğer integral aralığı $w = (u+v)/2$ orta noktasından iki eşit alt aralığa bölünürse, bu durumda her iki alt aralıkta Simpson kuralı kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\int_u^v f(x)dx &= \int_u^w f(x)dx + \int_w^v f(x)dx \\
&= S(u, w) - \frac{1}{90}\left[(w-u)/2\right]^5 f^{(4)}(\xi_2) + S(w, v) \\
&\quad - \frac{1}{90}\left[(v-w)/2\right]^5 f^{(4)}(\xi_3) \\
&= S^* + S^{**} - \frac{1}{90}\left(\frac{v-u}{2^2}\right)^5 \left[f^{(4)}(\xi_2) + f^{(4)}(\xi_3)\right] \\
&= S^* + S^{**} - \frac{1}{2^9}\frac{1}{90}(v-u)^5 f^{(4)}(\xi)
\end{aligned} \tag{5}$$

Bu hesaplamada, $\xi_2 \in (u, w)$, $\xi_3 \in (w, v)$ ve $\xi \in (u, v)$ olmak üzere,

$$S^* \equiv S(u, w) \qquad S^{**} \equiv S(w, v)$$

$$f^{(4)}(\xi) \equiv \frac{1}{2}\left[f^{(4)}(\xi_2) + f^{(4)}(\xi_3)\right] \tag{6}$$

aldık.

Küçük aralıklarda Denklem (4) ve (5) te $f^{(4)}(\xi_1) = f^{(4)}(\xi)$ kabul edelim. Bu durumda, Denklem (5) i 16/15 ile çarpıp, Denklem (4) ün 1/15 katından çıkararak, $f^{(4)}$ ü içeren terim yok edilebilir. Sonuç aşağıdadır:

$$\int_u^v f(x)dx \approx S^* + S^{**} + \frac{1}{15}\left[S^* + S^{**} - S(u, v)\right] \tag{7}$$

$\left[S^* + S^{**} - S(u, v)\right]$ yeterince küçük iken aralıkların daha fazla bölünmesi durdurulur.