NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

SAYISAL İNTEGRAL

2 İnterpolasyon Yardımıyla Sayısal İntegral

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(xye^x)\,dxdy$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \tan(xy^2)\,dydx$$

$$\int_0^\pi \cos(3\cos\theta)\,d\theta$$

gibi integral problemleri elemanter analizde öğrenilen tekniklerle yanıtlanamazlar. Çünkü o teknikler **antitürevlemeye** bağlıdırlar.

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralinin değerini bulmak için, önce $F' = f$ özelliğine sahip bir F fonksiyonu üretiriz. Buradan da

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

elde ederiz. Örneğin,

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^4 = \frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{3}1^3 = 21$$

buluruz. $F(x) = (1/3)x^3$ ile verilen F fonksiyonu $f(x) = x^2$ ile verilen f fonksiyonunun bir **antitürevidir**.

Çoğu elemanter fonksiyonlar basit antitürevlere sahip değildirler. Örneğin $f(x) = e^{x^2}$ nin bir antitürevi

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

dir.

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

integralinin sayısal hesabı için güçlü bir taktik, f ye yaklaşan ve kolaylıkla integrallenebilen bir başka g fonksiyonu ile f yi değiştirmektir. Böylece, $f \approx g$ den kolayca

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$$

diyebiliriz. g belli bir nod kümesinde f yi *interpole* eden bir polinom olabilir.

- f nin bir polinom yaklaşımı diğer yollarla da, örneğin bir *Taylor serisi kesilerek*, elde edilebilir.

Örneğin

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)k!}$$

elde ederiz. Bununla beraber, sadece integrand *hesaplamayı* gerektiren genel yordamlara sahip olmak daha çekicidir.

Polinom İnterpolasyonu Yardımıyla İntegral

x_i ler $[a, b]$ de ve

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

olmak üzere, Lagrange polinomu

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x), \tag{2}$$

dir. Böylece,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx$$

yazabiliriz.

Bu yolla, *herhangi* bir f için kullanılabilecek olan aşağıdaki gibi bir formül elde ederiz:

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{3}$$

Eğer nodlar *eşit aralıklı* yerleşmiş ise, (3) formundaki bir formül bir **Newton-Cotes formülü** olarak adlandırılır.

Yamuk Kuralı

Eğer $n = 1$ ve nodlar da $x_0 = a$ ve $x_1 = b$ ise, en basit durum ortaya çıkar. Bu durumda, interpolasyon için temel polinomlar

$$\ell_0(x) = \frac{b-x}{b-a} \qquad \ell_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

olup, buradan

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x)dx = \frac{1}{2}(b-a) = \int_a^b \ell_1(x)dx = A_1$$

dir. Karşılık gelen tümleme formülü, böylece

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

olur. Bu, yamuk kuralı olarak bilinir. Bu formül her $f \in \Pi_1$ (yani derecesi en fazla 1 olan polinomlar) için kesin (eşitlik) dir. Dahası, bu formülün hata terimi, $\xi \in (a, b)$ olmak üzere,

$$-\tfrac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

dir.

Eğer $[a, b]$ aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

şeklinde parçalanmışsa, bu durumda yamuk kuralı herbir alt aralığa uygulanabilir. Burada nodların düzgün aralıklı olması gerekli değildir. Böylece,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \end{aligned}$$

bileşik yamuk kuralını elde ederiz.

Düzgün aralıklı $h = (b - a)/n$ ve $x_i = a + ih$ ile **bileşik yamuk kuralı**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right] \\ &= h\sum_{i=0}^{n}{}'' f(a+ih) \end{aligned} \tag{4}$$

formunu alır. Bileşik yamuk kuralı için hata terimi

$$-\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$$

olup, burada $\xi \in (a, b)$ dir.

Örnek

Eğer Newton-Cotes yordamında $n = 1$ ve $[a, b] = [0, 1]$ alırsak,

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1) \tag{5}$$

formülünü elde ederiz. (3) formülünü kullanarak bu kuralı çıkarınız.

Çözüm

0, $\frac{1}{2}$ ve 1 nodları için üç temel polinom

$$\ell_0(x) = 2(x - \tfrac{1}{2})(x-1),\ \ell_1(x) = -4x(x-1),\ \ell_2(x) = 2x(x - \tfrac{1}{2})$$

olur. Böylece

$$A_0 = \int_0^1 \ell_0(x)dx = \frac{1}{6} \quad = \int_0^1 \ell_2(x)dx = A_2$$
$$A_1 = \int_0^1 \ell_1(x)dx = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

(3) formülünün çıkarılış şeklinden, derecesi $\leq n$ olan her polinom için bu formülün *kesin* olduğunu hemen görmekteyiz. Böylece **belirsiz katsayılar yöntemi** ile (3) formülüne benzer formüller üretmek kolaydır. Bunu görmek için, şimdi (5) eşitliğini bu yolla elde edelim.

Yani, derecesi ≤ 2 olan tüm polinomlar için kesin olan

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(1)$$

formunda bir formül arayalım.

Deneme fonksiyonları olarak, sırası ile $f(x) = 1$, x ve x^2 yi kullanarak

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 dx = A_0 + A_1 + A_2 \\ \frac{1}{2} &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} A_1 + A_2 \\ \frac{1}{3} &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{4} A_1 + A_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu denklem sisteminin çözümü ise $A_0 = 1/6$, $A_1 = 2/3$ ve $A_2 = 1/6$ dır. Bu formül lineer olduğu için, ikinci dereceden herhangi bir $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ polinomu için kesin değer üretecektir.