NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

Hermite İnterpolasyonu

Hermite interpolasyonu terimi, bir fonksiyonun ve türevlerinin bir nod setindeki interpolasyonunu kasteder. Bu tipten bir interpolasyon ile basit tipten (türevlerin interpole edilmediği) bir interpolasyon arasında bir ayırım yapıldığında, basit tipten olan sıklıkla **Lagrange interpolasyonu** olarak adlandırılır.
Hermite interpolasyonunun öğretici ve kullanışlı bir örneği şu şekildedir: İki farklı nokta, x_1 ve x_2 de bir f fonksiyonu ve f' *türevini* interpole eden en küçük dereceden bir polinom arıyoruz. Bu polinom şu dört koşulu sağlayacaktır:

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad p'(x_i) = f'(x_i) \qquad (i = 0, 1)$$

Dört koşul olduğu için, çözümü, en fazla 3. dereceden polinomların lineer uzayı olan Π_3 de aramak akla yatkın olur.

Polinomu

$$p(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^2(x - x_1)$$

şeklinde yazalım. Bu durumda

$$p'(x) = b + 2c(x - x_0) + 2d(x - x_0)(x - x_1) + d(x - x_0)^2$$

olur. p üzerindeki dört koşul, böylece

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a \\ f'(x_0) &= b \\ f(x_1) &= a + bh + ch^2 \qquad (h = x_1 - x_0) \\ f'(x_1) &= b + 2ch + dh^2 \end{aligned}$$

olur ki buradan $f(x_i)$ ve $f'(x_i)$ nin değerleri ne olursa olsun, problem çözülebilirdir.

- Genel olarak, bir f fonksiyonunun ve bazı türevlerinin değerleri interpole edilmekte ise, bu durumda (polinomdaki katsayıları hesaplamayı umut ettiğimiz) lineer denklem sistemi *tekil* olabileceğinden dolayı bazı zorluklarla karşılaşabiliriz. Bu durumu basit bir örnekle görebiliriz.

Örnek

$p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p'(\frac{1}{2}) = 2$ değerlerine sahip olan bir p polinomu bulunuz.

Çözüm

Üç koşul verildiği için,

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

kuadratik polinomunu deneyelim. $p(0) = 0$ *koşulu* $a = 0$ *verir. Diğer iki koşul ise*

$$\begin{aligned} 1 &= p(1) = b + c \\ 2 &= p'(\tfrac{1}{2}) = b + c \end{aligned}$$

verir. O halde, problem kuadratik çözüme sahip değildir. Dikkat edilirse, katsayılar matrisi tekildir.

Çözüm (*Devam*)

Şimdi, aynı problem için bir

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

kübik polinomu denersek, bu durumda bir çözümün var olduğunu fakat tek olmadığını görürüz. Dikkat edilirse, önce olduğu gibi $a = 0$ *olup, geriye kalan koşullar ise*

$$\begin{aligned} 1 &= b + c + d \\ 2 &= b + c + \tfrac{3}{4}d \end{aligned}$$

olur. Bu sistemin çözümü $d = -4$ *ve* $b + c = 5$ *dir.*

- Bu tipten *genel* bir problem, açık olarak kendi yapısıyla ilişkili bir çok ilgi çekici zorluklara sahiptir. Bu konu **Birkhoff interpolasyonu** olarak bilinmektedir ve son zamanlarda oldukça fazla miktarda araştırma bu konuya ayrılmıştır.

- Bu tipten *genel* bir problem, açık olarak kendi yapısıyla ilişkili bir çok ilgi çekici zorluklara sahiptir. Bu konu **Birkhoff interpolasyonu** olarak bilinmektedir ve son zamanlarda oldukça fazla miktarda araştırma bu konuya ayrılmıştır.
- Şimdi interpolasyon polinomlarının tek bir çözüme sahip olan geniş bir sınıfını tartışacağız. Bu kısıtlanmış sınıftaki problemler genellikle **Hermite interpolasyonu** olarak bilinir.

- Bir Hermite probleminde; bir $p^{(j)}(x_i)$ türevinin (bir x_i nodunda) verildiği her zaman, $p^{(j-1)}(x_i), p^{(j-2)}(x_i), ..., p'(x_i)$ ve $p(x_i)$ nin de verildiğini kabul ediyoruz. Gösterimimizi, x_i nodunda k_i tane interpolasyon koşulu belirlenmiş şekilde seçiyoruz. Dikkat edilirse k_i değeri i ye göre değişebilir. Nodlar $x_0, x_1, ..., x_n$ olsun ve x_i nodunda

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij} \quad (0 \leq j \leq k_i - 1, \quad 0 \leq i \leq n) \tag{1}$$

interpolasyon koşulları verilsin. p üzerindeki toplam koşul sayısı $m + 1$ ile gösterilir ki böylece

$$m + 1 = k_0 + k_1 + \cdots + k_n \tag{2}$$

dir.

Teorem (Hermite İnterpolasyonu)

Π_m *de*

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij} \quad (0 \leq j \leq k_i - 1, \quad 0 \leq i \leq n)$$

eşitliği ile verilen Hermite interpolasyon koşullarını sağlayan tek bir p polinomu vardır.