Ders 3

Kanıtlama

Konular

Temel Teknikler
- Giriş
- Doğrudan Tanıt
- Çelişkiyle Tanıt
- Eşdeğerlilik Tanıtı

Tümevarım
- Giriş
- Güçlü Tümevarım

Bazı kabul görmüş tanıtlama teknikleri

- *Doğrudan tanıtlama*: Sonucun, aksiyomlar, tanımlar ve daha önceki savların mantıksal olarak birleştirilmesiyle elde edildiği yöntem.
- *Tümevarımla tanıtlama*: Temel bir durumun tanıtlandığı ve bir *tümevarım kuralı* kulanılarak çok sayıda (sıkça **sonsuz** olan) başka durumların tanıtlandığı yöntem.
- ***Olmayana ergi*** *tanıtı* (*Reductio ad absurdum* olarak da bilinir): Bir özelliğin doğru olması durumunda mantıksal bir çelişkinin doğacağı dolayısıyla özelliğin yanlış olduğunun gösterildiği yöntem.
- *Oluşturarak tanıtlama*: İstenen özelliğe sahip somut bir örnek oluşturularak istenen özellikte bir nesnenin var olduğunun gösterildiği yöntem.
- *Tüketerek tanıtlama*: Tanıtlanacak önermenin sonlu sayıda duruma bölünerek her birinin ayrı ayrı tanıtlandığı yöntem.

3

Kaba Kuvvet Yöntemi

- olası bütün durumları teker teker incelemek

Teorem

$\{2, 4, 6, \ldots, 26\}$ kümesinden seçilecek her sayı en fazla 3 tamkarenin toplamı şeklinde yazılabilir.

Tanıt.

$2 = 1+1$	$10 = 9+1$	$20 = 16+4$
$4 = 4$	$12 = 4+4+4$	$22 = 9+9+4$
$6 = 4+1+1$	$14 = 9+4+1$	$24 = 16+4+4$
$8 = 4+4$	$16 = 16$	$26 = 25+1$
	$18 = 9+9$	

4

Temel Kurallar

Tanım

evrensel özelleştirme kuralı: (US)

$\forall x\ p(x) \Rightarrow p(a)$

Tanım

evrensel genelleştirme kuralı: (UG)

rasgele seçilen bir a için $p(a) \Rightarrow \forall x\ p(x)$

5

Evrensel Özelleştirme Örneği

Örnek

Bütün insanlar ölümlüdür. Sokrates bir insandır. O halde Sokrates ölümlüdür.

- $\mathcal{U}$: bütün insanlar
- $p(x)$: x ölümlüdür
- $\forall x\ p(x)$: bütün insanlar ölümlüdür
- a: Sokrates, $a \in \mathcal{U}$: Sokrates bir insandır
- o halde, $p(a)$: Sokrates ölümlüdür

6

Evrensel Özelleştirme Örneği

$$\begin{array}{c} \forall x\ [j(x) \vee s(x) \rightarrow \neg p(x)] \\ p(m) \\ \hline \therefore \neg s(m) \end{array}$$

1.	$\forall x\ [j(x) \vee s(x) \rightarrow \neg p(x)]$	*Pre*
2.	$p(m)$	*Pre*
3.	$j(m) \vee s(m) \rightarrow \neg p(m)$	1, *US*
4.	$p(m) \rightarrow \neg[j(m) \vee s(m)]$	3, *Imp*
5.	$p(m) \rightarrow \neg j(m) \wedge \neg s(m)$	4, *DM*
6.	$\neg j(m) \wedge \neg s(m)$	5, 2, *MP*
7.	$\neg s(m)$	6, *Sim*

Evrensel Genelleştirme Örneği

$$\begin{array}{c} \forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)] \\ \forall x\ [q(x) \rightarrow r(x)] \\ \hline \therefore \forall x\ [p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

1.	$\forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)]$	*Pre*
2.	$p(c) \rightarrow q(c)$	1, *US*
3.	$\forall x\ [q(x) \rightarrow r(x)]$	*Pre*
4.	$q(c) \rightarrow r(c)$	3, *US*
5.	$p(c) \rightarrow r(c)$	2, 4, *Syl*
6.	$\forall x\ [p(x) \rightarrow r(x)]$	5, *UG*

Boş Tanıt

boş tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için P'nin yanlış olduğunu göstermek

Boş Tanıt Örneği

Teorem

$\forall S \; \emptyset \subseteq S$

Tanıt.

$\emptyset \subseteq S \Leftrightarrow \forall x \; (x \in \emptyset) \rightarrow (x \in S)$

$\forall x \; x \notin \emptyset$

Değersiz Tanıt

değersiz tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için Q'nun doğru olduğunu göstermek

Değersiz Tanıt Örneği

Teorem

$\forall x \in \mathbb{R} \; (x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0)$

Tanıt.

$\forall x \in \mathbb{R} \; x^2 \geq 0$ $\square$

Doğrudan Tanıt

doğrudan tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için P doğru olduğunda Q'nun doğru olduğunu göstermek

Doğrudan Tanıt Örneği

Teorem

$3|(a-2) \Rightarrow 3|(a^2-1)$

Tanıt.

$$\begin{aligned} 3|(a-2) &\Rightarrow a-2=3k \\ &\Rightarrow a+1=a-2+3=3k+3=3(k+1) \\ &\Rightarrow a^2-1=(a+1)(a-1)=3(k+1)(a-1) \end{aligned} \quad \square$$

Doğrudan Tanıt Örneği

- **Örnek:** Tüm n tamsayıları için, n çift ise n^2nin de çift olduğunu kanıtlayınız.
- **İspat:** n çift bir tamsayı olsun. Bu halde 2, n'in çarpanlarından biridir ve n, m bir tamsayı olmak üzere $n=2m$ şeklinde ifade edilebilir. Buradan yola çıkarak $n^2=(2m)^2=4m^2$ olur. $4m^2$ ifadesi $2m^2$ tamsayı olmak üzere $2(2m^2)$ şeklinde yazılabilir. Bu sebeple n^2 çifttir.

Dolaylı Tanıt

dolaylı tanıt

$P \Rightarrow Q$ tanıtı için Q yanlış olduğunda P'nin yanlış olduğunu göstermek

Dolaylı Tanıt Örnekleri

Teorem

$x \cdot y > 25 \Rightarrow (x > 5) \vee (y > 5)$

Tanıt.

- $\neg Q \Leftrightarrow (0 < x \leq 5) \wedge (0 < y \leq 5)$
- $0 = 0 \cdot 0 \leq x \cdot y \leq 5 \cdot 5 = 25$

□

13

Dolaylı Tanıt Örneği

- **Örnek:** Ters pozitifini sağlayarak, her *n* tamsayısı için n^2 çift ise *n* de çifttir ifadesini ispatlayınız.
- **İspat:** İspatlanacak ifade *P(n)* 'n^2 çifttir', *Q(n)* '*n* çifttir' ve *n* seçilmiş bir tamsayı olmak üzere, $P(n) \rightarrow Q(n)$' dir. Ters pozitif ise $\sim Q(n) \rightarrow \sim P(n)$: *n* tek ise n^2 tektir. Bu ifadeyi '*n* tektir' in doğru olduğunu varsayarak ve n^2 'nin tek olduğunu göstererek kanıtlayabiliriz.

n tek bir tamsayı olsun.

$n = 2m+1$, *m* tamsayı

$\Rightarrow n^2 = (2m+1)^2$

$= 4m^2 + 4m + 1$

$= 2(2m^2 + 2m) + 1$, $(2m^2 + 2m)$ tamsayı

$\Rightarrow n^2$ tektir.

□

14

Dolaylı Tanıt Örneği

Teorem
$\exists k\ a, b, k \in \mathbb{N} \wedge ab = 2k \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}\ a = 2i \vee \exists j \in \mathbb{N}\ b = 2j$

Tanıt.

- $\neg Q \Leftrightarrow (\neg\exists i \in \mathbb{N}\ a = 2i) \wedge (\neg\exists j \in \mathbb{N}\ b = 2j)$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}\ a = 2x+1) \wedge (\exists y \in \mathbb{N}\ b = 2y+1) \\
&\Rightarrow ab = (2x+1)(2y+1) \\
&\Rightarrow ab = 4xy + 2(x+y) + 1 \\
&\Rightarrow \neg\exists k\ a, b, k \in \mathbb{N} \wedge ab = 2k
\end{aligned}
$$

□

15

Çelişkiyle Tanıt

çelişkiyle tanıt
P tanıtı için $\neg P \Rightarrow Q \wedge \neg Q$ olduğunu göstermek

Teorem
En büyük asal sayı yoktur.

Tanıt.

- $\neg P$: En büyük asal sayı vardır.
- Q: en büyük asal sayı S
- asal sayılar: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, S$
- $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots S + 1$ sayısı, 2..S aralığındaki hiçbir asal sayıya kalansız bölünmez
  1. ya S'den büyük bir asal sayıya bölünür: $\neg Q$
  2. ya da kendisi asaldır: $\neg Q$

□

16

Çelişkiyle Tanıt Örneği

Teorem

$\neg\exists a, b \in \mathbb{N}^+ \; \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

Tanıt.

- $\neg P$: $\exists a, b \in \mathbb{N}^+ \; \sqrt{2} = \frac{a}{b}$
- Q: $obeb(a, b) = 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; 2 = \frac{a^2}{b^2} \\ &\Rightarrow \; a^2 = 2b^2 \\ &\Rightarrow \; \exists i \in \mathbb{N}^+ \; a^2 = 2i \\ &\Rightarrow \; \exists j \in \mathbb{N}^+ \; a = 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; 4j^2 = 2b^2 \\ &\Rightarrow \; b^2 = 2j^2 \\ &\Rightarrow \; \exists k \in \mathbb{N}^+ \; b^2 = 2k \\ &\Rightarrow \; \exists l \in \mathbb{N}^+ \; b = 2l \\ &\Rightarrow \; obeb(a, b) \geq 2 : \neg Q \end{aligned}$$

□

Eşdeğerlilik Tanıtı

- $P \Leftrightarrow Q$ tanıtı için hem $P \Rightarrow Q$, hem de $Q \Rightarrow P$ tanıtlanmalı
- $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n$ tanıtı $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_n \Rightarrow P_1$ şeklinde yapılabilir

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

Teorem

$a, b, n, q_1, r_1, q_2, r_2 \in \mathbb{N}^+$

$a = q_1 \cdot n + r_1$

$b = q_2 \cdot n + r_2$

$$r_1 = r_2 \Leftrightarrow n|(a - b)$$

$r_1 = r_2 \Rightarrow n|(a - b)$.

$$\begin{aligned} a - b &= (q_1 \cdot n + r_1) \\ &\quad -(q_2 \cdot n + r_2) \\ &= (q_1 - q_2) \cdot n \\ &\quad +(r_1 - r_2) \\ r_1 = r_2 &\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \\ &\Rightarrow a - b = (q_1 - q_2) \cdot n \qquad \square \end{aligned}$$

$n|(a - b) \Rightarrow r_1 = r_2$.

$$\begin{aligned} a - b &= (q_1 \cdot n + r_1) \\ &\quad -(q_2 \cdot n + r_2) \\ &= (q_1 - q_2) \cdot n \\ &\quad +(r_1 - r_2) \\ n|(a - b) &\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = r_2 \qquad \square \end{aligned}$$

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

Teorem

$$\begin{aligned} & A \subseteq B \\ \Leftrightarrow\ & A \cup B = B \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B = A \\ \Leftrightarrow\ & \overline{B} \subseteq \overline{A} \end{aligned}$$

20

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A \cup B$

$B \subseteq A \cup B$

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ A \subseteq B &\Rightarrow x \in B \\ &\Rightarrow A \cup B \subseteq B \quad \square \end{aligned}$$

$A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A.$

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cap B \subseteq A \wedge A \subseteq A \cap B$

$A \cap B \subseteq A$

$$\begin{aligned} y \in A &\Rightarrow y \in A \cup B \\ A \cup B = B &\Rightarrow y \in B \\ &\Rightarrow y \in A \cap B \\ &\Rightarrow A \subseteq A \cap B \quad \square \end{aligned}$$

21

Eşdeğerlilik Tanıtı Örneği

$A \cap B = A \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$

$$\begin{aligned} z \in \overline{B} &\Rightarrow z \notin B \\ &\Rightarrow z \notin A \cap B \\ A \cap B = A &\Rightarrow z \notin A \\ &\Rightarrow z \in \overline{A} \\ &\Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A} \end{aligned}$$

$\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B.$

$$\begin{aligned} w \in A &\Rightarrow w \notin \overline{A} \\ w \notin B &\Rightarrow w \in \overline{B} \\ \overline{B} \subseteq \overline{A} &\Rightarrow w \in \overline{A} \\ w \notin \overline{A} \wedge w \in \overline{A} &\Rightarrow w \in B \\ &\Rightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

22

Tümevarım

Tanım

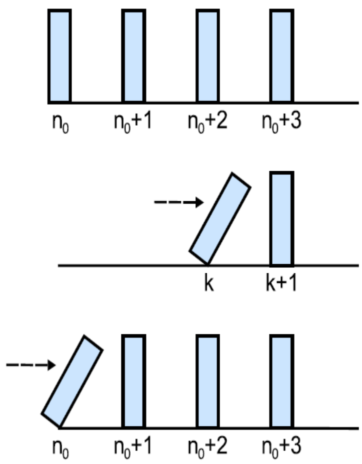
$S(n)$: $n \in \mathbb{Z}^+$ üzerinde tanımlanan bir yüklem

$$S(n_0) \wedge [\forall k \geq n_0 [S(k) \Rightarrow S(k+1)]] \Rightarrow \forall n \geq n_0 \; S(n)$$

- $S(n_0)$: *taban adımı*
- $\forall k \geq n_0 [S(k) \Rightarrow S(k+1)]$: *tümevarım adımı*

23

Tümevarım



24

Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{N}^+ \; 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

Tanıt.

- $n=1$: $1=1^2$
- $n=k$: $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ kabul edelim
- $n=k+1$:

$$\begin{aligned} & 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \\ = \; & k^2+2k+1 \\ = \; & (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \\ 1+3+5+7+9+11 &= 36 \\ 1+3+5+7+9+11+13 &= 49 \\ 1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64 \\ 1+3+5+7+9+11+13+15+17 &= 81 \\ 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 &= 100 \end{aligned}$$

25

Tümevarım Örneği

Teorem
$\forall n \in \mathbb{N}^+, n \geq 4 \; [2^n < n!]$

Tanıt.

- $n=4$: $2^4=16<24=4!$
- $n=k$: $2^k<k!$ kabul edelim
- $n=k+1$:
  $2^{k+1}=2\cdot 2^k<2\cdot k!<(k+1)\cdot k!=(k+1)!$

$\square$

26

Tümevarım Örneği

Teorem

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 14\ \exists i, j \in \mathbb{N}\ n = 3i + 8j$

Tanıt.

- $n = 14$: $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$
- $n = k$: $k = 3i + 8j$ kabul edelim
- $n = k + 1$:
  - $k = 3i + 8j, j > 0 \Rightarrow k + 1 = k - 8 + 3 \cdot 3$
    $\Rightarrow k + 1 = 3(i + 3) + 8(j - 1)$
  - $k = 3i + 8j, j = 0, i \geq 5 \Rightarrow k + 1 = k - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 8$
    $\Rightarrow k + 1 = 3(i - 5) + 8(j + 2)$

$\square$

Güçlü Tümevarım

Tanım

$S(n_0) \wedge [\forall k \geq n_0[(\forall i \leq k\ S(i)) \Rightarrow S(k+1)]] \Rightarrow \forall n \geq n_0\ S(n)$

Teorem

$\forall n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2$

n asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir

Tanıt.

- $n = 2$: $2 = 2$
- $\forall i \leq k$ için doğru kabul edelim
- $n = k + 1$:
  1. n asaldır: $n = n$
  2. $n = u \cdot v$:
     $u < k \wedge v < k \Rightarrow u$ ve v asal sayıların çarpımı şeklinde yazılabilir

$\square$

Güçlü Tümevarım Örneği

Teorem

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 14\ \exists i, j \in \mathbb{N}\ n = 3i + 8j$

Tanıt.

- $n = 14$: $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$
  $n = 15$: $15 = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 0$
  $n = 16$: $16 = 3 \cdot 0 + 8 \cdot 2$
- $n \leq k$: $k = 3i + 8j$ kabul edelim
- $n = k + 1$: $k + 1 = (k - 2) + 3$

$\square$

29

Hatalı Tümevarım Örneği

Teorem

$\forall n \in \mathbb{N}^+\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2+n+2}{2}$

Taban adıma dikkat

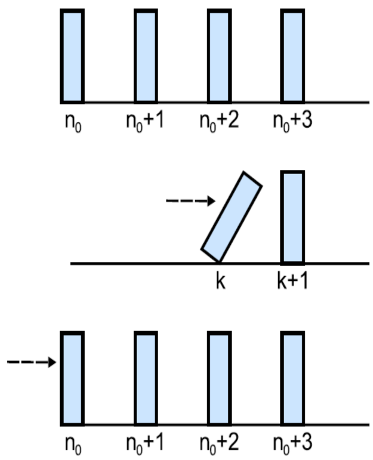
- $n = k$: $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k^2+k+2}{2}$ kabul edelim
- $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \\ = & \frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 = \frac{k^2+k+2}{2} + \frac{2k+2}{2} \\ = & \frac{k^2+3k+4}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} \end{aligned}$$

- $n = 1$: $1 \neq \frac{1^2+1+2}{2} = 2$

30

Hatalı Tümevarım Örneği



31

Hatalı Tümevarım Örneği

Teorem

Bütün atlar aynı renktir.

$A(n)$: *n atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.*

$\forall n \in \mathbb{N}^+ A(n)$

32

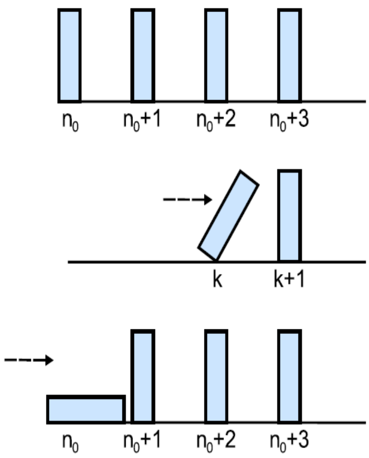
Hatalı Tümevarım Örneği

n üzerinden hatalı tümevarım

- $n = 1$: $A(1)$
  1 atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.
- $n = k$: $A(k)$ doğru kabul edelim
  k atlı kümelerdeki bütün atlar aynı renktir.
- $A(k+1) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cup \{a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}\}$
  - $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ kümesindeki bütün atlar aynı renk (a_2)
  - $\{a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}\}$ kümesindeki bütün atlar aynı renk (a_2)

33

Hatalı Tümevarım Örneği



34