DETERMİNANT

1.GİRİŞ

Tanım: Determinant, $\Delta : M_n^n \rightarrow \Re$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, boyutu *nxn* olan bir matrisin elemanları kullanılarak bir reel sayı üretir. Bu elemanların sıralanışı,

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

biçimindedir. Determinant hesaplamalarının nasıl yapılacağına ileride değinilecektir.

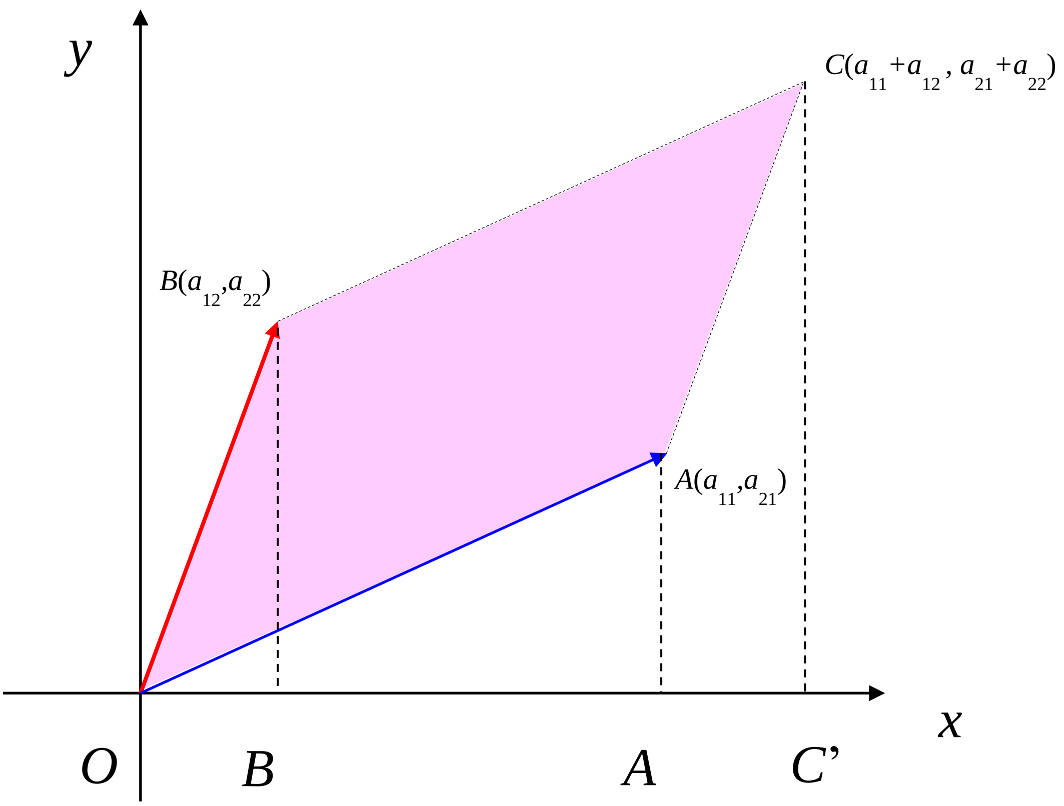
Bir determinantın fonksiyonel gösterimi:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} \cdots \vec{\mathbf{v}}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n)$$

şeklindedir.

Geometrik olarak bu skaler büyüklük determinantı oluşturan vektörlerin arasında kalan alan, hacim vs. değerine karşılık gelir.



$$\Delta(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$= \text{alan}$$

n=2 için determinant, vektörlerin oluşturmuş olduğu paralelkenarın alanını verir.

2.DETERMİNANT HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

2.1 DETERMİNANT FONKSİYONU

Tanım: **Δ** boyutu $n \times n$ olan bir determinant olsun. Determinant fonksiyonu *det*(**Δ**) ya da $|\boldsymbol{\Delta}|$ ile gösterilir. *det*(**Δ**) determinantın tüm işaretli elemanter çarpımlarının toplamıdır:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

det(**A**) sayısı **A**'nın determinantı olarak adlandırılır.

Tanım: Bir **Δ** determinantındaki a_{ij} (i=1,…,n) elemanlarına *asal köşegen* ya da sadece *köşegen* elemanları denir.

2.1.1 Permütasyon

Tanım: Bir tam sayılar {1, 2, … , n} kümesindeki elemanların tekrar olmaksızın farklı sıralamalarının düzenlenmesine *permütasyon* denir.

Örnek: {1, 2, 3} tam sayılar kümesinin altı farklı permütasyonu vardır:

(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2)

(1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1)

Tanım: Bir tam sayılar {1, 2, … , n} kümesindeki elemanların farklı tüm mümkün sıralamalarının sayısı (*Permütasyon sayısı*):

$$n! = n(n-1)\dots 2.1$$

Tanım: Bir tam sayılar {1, 2, … , n} kümesindeki elemanların her hangi bir permütasyonu genel olarak:

$$(j_1, j_2, \dots, j_n)$$

2.1.2 Ters Dönüşüm Sayısı

Tanım: Bir $\left(j_1, j_2, \ldots, j_n\right)$ permütasyonundaki *ters dönüşüm* (inversion) sayısı bu permütasyondaki büyük bir sayıyı takip eden küçük sayıların sayısıdır:

1. $\left(j_1, j_2, \ldots, j_n\right)$ permütasyonunda j_1 sayısını takip eden küçük sayıların sayısı belirlenir,

2. $\left(j_1, j_2, \ldots, j_n\right)$ permütasyonunda j_2 sayısını takip eden küçük sayıların sayısı belirlenir,

3. Bu işlem j_{n-1} sayısına kadar sürdürülür,

4. Bulunan sayılar toplanır.

Elde edilen toplam sayı $\left(j_1, j_2, \ldots, j_n\right)$ permütasyonunun ters dönüşüm sayısıdır.

Tanım: Bir permütasyon, eğer toplam ters dönüşüm sayısı çift bir sayı ise *çift permütasyon*,

eğer toplam ters dönüşüm sayısı tek ise *tek permütasyon* olarak adlandırılır.

Örnek: Aşağıdaki permütasyonları ters dönüşüm sayılarını bulunuz.

(6, 1, 3, 4, 5, 2)=5+0+1+1+1=8

(2, 4, 1, 3) =1+2+0 =3

(1, 2, 3, 4) =0+0+0 =0

Örnek: {1, 2, 3} tam sayılar kümesinin tüm mümkün permütasyonlarını tek ya da çift olarak belirleyiniz.

Permütasyon	*Ters Dönüşüm Sayısı*	*Sınıflama*
(1, 2, 3)	0	Çift
(1, 3, 2)	1	Tek
(2, 1, 3)	1	Tek
(2, 3, 1)	2	Çift
(3, 1, 2)	2	Çift
(3, 2, 1)	3	Tek

3×3 boyutlu matrisin determinantı

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadedeki 6 terim dikkatlice incelendiğinde, matrisin her bir satır ve sütunundaki bir elemanın üçlü çarpımı şeklinde olduğu görülmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bir başka deyişle, kare matrisin içerisinden her bir satır ve sütundan bir örüntü oluşturacak şekilde sayı seçilir. En basit örüntü, her bir elemanın a_{ii}'ye denk geldiği köşegen örüntüdür.

Boyutu $n×n$ olan bir matriste kaç adet örüntü bulunur? Bu sorunun cevabı için sütunlarda sırasıyla bir örüntü oluşturulsun. İlk sütun için n farklı seçim yapılabilir. Bunların her biri için bir sonraki sütunda n-1 seçenek kalır. Böylelikle ilk iki sütun için $n(n-1)$ farklı seçim yapılabilir. Bunların da her biri için bir sonraki sütunda n-2 seçenek bulunur ve seçim böylece devam eder. Son sütuna gelindiğinde seçilmemiş sadece bir satır kalır. Sonuç olarak $n×n$ boyutlu bir matris için $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ farklı örüntü oluşturulabilir.

Boyutu 3×3 olan bir matristeki P örüntüsü için, örüntüdeki tüm elemanların çarpımı (elemanter çarpım) prod P ile gösterilir. Örneğin, $P = \left(a_{12}, a_{23}, a_{31}\right)$ şeklinde tanımlanan bir örüntü için, $\text{prod}P = a_{12}.a_{23}.a_{31}$ 'dir. Ayrıca,

$$\det A = \sum \pm \text{prod}P$$

yazılabilir. Burada toplam, 3×3 boyutlu matristeki altı adet P örüntüsü üzerinden yapılmaktadır. Bir sonraki adımda bu altı elemanın işaretleri incelenmelidir.

Bu işaretler, determinantın dalgalı değişen işaret özelliğiyle ilişkilidir. Örneğin,

$$\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$$

Satırlar yer değiştirilerek köşegen hale getirilebilir.

Buna denk olarak, satır değişimlerini saymadan işareti tahmin etmenin yolu bulunmaktadır. Bir örüntüdeki iki sayı, biri diğerinin sağında ve üzerindeyse işaret değişimilidir. Boyutu 3×3 olan matristeki 6 örüntüdeki işaret değişimi sayısı ele alınsın:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

İşaret değişimi yok 2 İşaret değişimi 2 İşaret değişimi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3 İşaret değişimi 1 İşaret değişimi 1 İşaret değişimi

Buradan görülebileceği gibi $\det A = \sum \pm \mathrm{prod} P$ formülündeki prod P'nin işareti, P'deki işaret değişimi sayısına bağlıdır. Eğer bu sayı çift ise işaret artı, tek ise eksidir. Böylece,

$$\det A = \sum (-1)^{P\text{'deki işaret değişimi sayısı}} \mathrm{prod} P$$

yazılabilir. Eğer P örüntüsünün işareti $\operatorname{sgn} P = (-1)^{P\text{'deki işaret değişimi sayısı}}$ şeklinde tanımlanırsa,

$$\det A = \sum (\operatorname{sgn} P)(\mathrm{prod} P)$$

olarak ifade edilebilir. Alternatif olarak işaret, sütün değişimleri cinsinden de ifade edilebilir. Eğer P örüntüsü p adet sütun değişimi ile köşegen hale getirilebiliyorsa, $\operatorname{sgn} P = (-1)^p$ yazılabilir.

Tanım: *Örüntüler*, *İşaret değişimiler* ve *Determinantlar*

Boyutu $n \times n$ olan bir **A** matrisinde bir *P örüntüsü*, her bir satır ve sütundan yalnızca bir eleman seçilecek şekilde n farklı biçimde oluşturulabilir.

P örüntüsünün elemanlarının çarpımı (elemanter çarpım), prod P ile gösterilir.

Bir örüntüdeki elemanlardan ikisi, matriste biri diğerinin sağında ve üzerindeyse *işaret değişimilidir*.

Bir örüntünün işareti, $\operatorname{sgn} P = (-1)^{P\text{'deki işaret değişimi sayısı}}$ şeklinde tanımlanır.

A matrisinin determinantı,

$$\det A = \sum (\operatorname{sgn} P)(\mathrm{prod} P)$$

şeklindedir ve toplama işlemi **A** matrisindeki $n!$ adet P örüntüsü üzerinden yapılmaktadır. Böylelikle, çift sayıda işaret değişimine sahip örüntülere ait çarpımlar toplanıp tek sayıda işaret değişimine sahip örüntülere ait çarpımlar çıkarılmaktadır.

Örnek: Yukarıdaki tanımlar 2×2 boyutlu bir matris için uygulansın.

Boyutu 2×2 olan bir $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi için 2 adet örüntü vardır:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

İşaret değişimi yok 1 İşaret değişimi

Bu nedenle $\det \mathbf{A} = (-1)^0 ad + (-1)^1 bc = ad - bc$.

2.1.3 Elemanter Çarpım

Tanım: Bir $n \times n$ boyutlu **A** determinantının, aynı sıra ve sütundan gelmeyen n adet elemanının çarpımına *elemanter çarpım* denir.

Örnek: 2×2 boyutlu **A** determinantının tüm elemanter çarpımlarını bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Çözüm: Satırlar baz alındığında $a_{1.}a_{2.}$ Noktalar sütunları temsil etmektedir. İki sütun olduğundan {1, 2}. Permütasyonlar (1, 2) ve (2, 1)

Noktaların yerine permütasyonlar konarak elemanter çarpımlar:

$a_{11}a_{22}$ ve $a_{12}a_{21}$

Örnek: 3×3 boyutlu **A** determinantının tüm elemanter çarpımlarını bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Çözüm: Satırlar baz alındığında $a_{1.}a_{2.}a_{3.}$ Noktalar sütunları temsil etmektedir. Üç sütun olduğundan {1, 2, 3}. Permütasyonlar (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 2)

Noktaların yerine konarak elemanter çarpımlar:

$a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$

Tanım: Bir $n \times n$ boyutlu **A** determinantının, *işaretli elemanter çarpımı* $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ elemanter çarpımın -1 ya da +1 ile çarpımıdır.

Eğer $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ permütasyonu çift permütasyon ise $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$

Eğer $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ permütasyonu tek permütasyon ise $-a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$

Örnek: 2×2 boyutlu **A** determinantının tüm işaretli elemanter çarpımlarını bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Çözüm:

Elemanter	*Permütasyon*	*Ters Dönüşüm sayısı ve*	*İşaretli Elemanter Çarpım*

Çarpım		*İşaret*	
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	$0\rightarrow$ Çift	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	$1\rightarrow$ Tek	$-a_{12}a_{21}$

Örnek: 3×3 boyutlu **A** determinantının tüm işaretli elemanter çarpımlarını bulunuz.

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Çözüm:

Elemanter Çarpım	*Permütasyon*	*Ters Dönüşüm sayısı ve İşaret*	*İşaretli Elemanter Çarpım*
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	$0\rightarrow$ Çift	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	$1\rightarrow$ Tek	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	$1\rightarrow$ Tek	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	$2\rightarrow$ Çift	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	$2\rightarrow$ Çift	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	$3\rightarrow$ Tek	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Örnek: 2×2 boyutlu **A** determinantının

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

değerini bulunuz.

Çözüm: $\det(\mathbf{A})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Örnek: 3×3 boyutlu **A** determinantının

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinant fonksiyonu bir skalerdir.

2.2 ELEMANTER SATIR (SÜTUN) İŞLEMLERİ

Tanım: Bir determinantı, matrisi ya da doğrusal denklem sistemini *denk* determinat, matris ya da denklem sistemine dönüştüren işlemlere *elemanter işlemler* denir.

1. İki Satırın (sütunun) değiştirilmesi,
2. Bir satırın (sütunun) bir k sabiti ile çarpılması,
3. Bir satırın (sütunun) bir k sabiti ile çarpılıp bir diğer satıra (sütuna) eklenmesi.

Elemanter işlemler:

Genel olarak satır işlemleri için R, sütun işlemleri için C kullanılır:

j-inci satır ile i-inci satırın yer değiştirmesi$\rightarrow R_{ji}$

j-inci satırın bir k sabiti ile çarpılması$\rightarrow R_j(k)$

j-inci satırın bir k sabiti ile çarpılıp i-inci satır ile toplanması $\rightarrow R_{ji}(k)$

Echelon Determinant

Bir determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Elemanter satır (sütun) işlemleri kullanılarak,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Echelon determinanta dönüştürülebilir.

Örnek: Aşağıda verilen determinantı elemanter işlemler ile Echelon determinanta dönüştürüp değerini bulunuz.

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 5\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{vmatrix}$$

Çözüm:

$$\det\boldsymbol{\Delta}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 5\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{vmatrix}\rightarrow R_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -6 & 9\\ 0 & 1 & 5\\ 2 & 6 & 1\end{vmatrix}\rightarrow 3R_1$$

$$=-3\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 2 & 6 & 1\end{vmatrix}\rightarrow R_{13}\left(-2\right)=-3\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 10 & -5\end{vmatrix}\rightarrow R_{23}\left(-10\right)$$

$$=-3\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -55\end{vmatrix}\rightarrow -55R_3=\left(-3\right)\left(-55\right)\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left(-3\right)\left(-55\right)\left(1\right)=165$$

2.3 MİNÖRLER

Tanım: Boyutu *n* olan bir **Δ** determinantında *i*-inci satır ve *j*-inci sütunda yer alan *aij* elemanının bulunduğu satır ve sütun silinir. *n*-1 boyutlu yeni bir determinant elde edilir. Bu determinant **M***ij* ile gösterilir ve buna *aij* elemanının *minörü* denir.

İşaretli Minör

Tanım: Minör determinantı kullanılarak, **A***ij*=(-1)*i+j* **M***ij* yeni bir determinant tanımlanırsa, buna *aij* elemanının *işaretli minörü* (*kofaktörü, eş çarpanı*) denir.

Determinantın Bir Sıraya Göre Açılımı

Tanım: Bir Δ determınantının, bir sıra (sütun) elemanlarının tümü için işaretli minörler oluşturulur. İşaretli minörler kendilerine ait elemanlarla çarpılarak determinantın açılımı elde edilir.

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

Önemli: Determinantın herhangi bir satırının (sütunun) elemanları ile farklı herhangi bir satırının (sütunun) işaretli minorlerinin çarpımlarından elde edilen toplam sıfırdır.

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \qquad i \neq k \text{ için}$$

Önemli: Bir determinantın 1.satıra, 2.satıra,… n.satıra, 1.sütuna, 2. sütuna,…, n.sütuna göre açılımlarının *tümü birbirine eşittir*.

Örnek: **A** determinantının değerini ikinci sütuna göre açarak bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Çözüm:

$$\mathbf{A}_{12} = (-1)^{1+2}\mathbf{M}_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

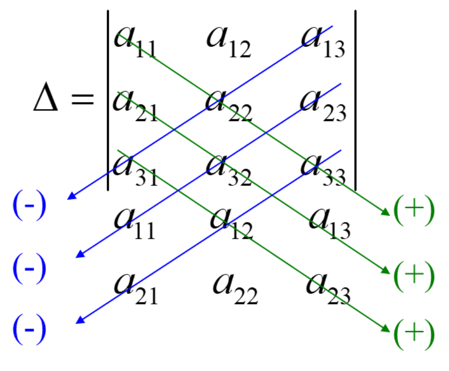
$$\mathbf{A}_{22} = (-1)^{2+2}\mathbf{M}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\mathbf{A}_{23} = (-1)^{2+3}\mathbf{M}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$\det \mathbf{A} = (1)(7) + (0)(-1) + (5)(-7) = -28$$

Uyarı: Sarrus Kuralı

Üç boyutlu bir determinantın pratik yoldan hesaplanması :



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Önemli: Sadece 3 boyutlu determinantlarda kullanılır.

3. DETERMİNANTIN ÖZELLİKLERİ VE ÖZEL DETERMİNANTLAR

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Δ determinantında satırlar ile sütunlar yer değiştirilirse

$$\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Δ determinantının transpozu (evriği) Δ^T elde edilir.

$$\det \Delta = \det \Delta^T$$

2. Determinantın bir satırı (sütunu) bir *k* sabiti ile çarpılırsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to R_i(k)$$

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k\,a_{i1} & k\,a_{i2} & \cdots & k\,a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \tilde{\Delta} = k \det \Delta$$

3. Determinantın bir satırı (sütunu) bir *k* sabiti ile çarpılırsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to R_{1,\dots,n}(k)$$

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k\,a_{i1} & k\,a_{i2} & \cdots & k\,a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \tilde{\Delta} = k^n \det \Delta$$

4. Determinantın herhangi iki satırı (sütunu) yer değiştirirse

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to R_{in}$$

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix}$$

$$\det \tilde{\Delta} = -\det \Delta$$

5. Determinantın herhangi bir satırının (sütununun) katları bir diğer satır (sütun) ile toplanırsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to R_{in}\left(k\right)$$

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+ka_{i1} & a_{n2}+ka_{i2} & \cdots & a_{nn}+ka_{in} \end{vmatrix}$$

$$\det \tilde{\Delta} = \det \Delta$$

6. Bir determinantta herhangi iki satır (veya sütun) orantılı ise determinantın değeri sıfıra eşittir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \end{vmatrix}$$

$$\det \Delta = 0$$

7. Bir determinantın herhangi bir satır (veya sütun) elemanlarının tümü sıfır ise determinantın değeri sıfıra eşittir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \Delta = 0$$

8. Bir determinantın köşegeninin altındaki (ya da üstündeki) tüm elemanlar sıfıra eşit ise eşalon (echelon) determinantır:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ya da } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det \Delta = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

Özel Determinantlar

Ek Determınant : Bir **Δ** determınantında her elemanın yerine,bu elemanın işaretli minörlerini yazarak elde edilen determınanta "*Ek Determınant*" denir. Ek**Δ** ile gösterilir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow Ek\,\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Ek\,\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Özellik : Δ, n boyutlu bir determınant ise $Ek\Delta=\Delta^{n-1}$ dır.

Simetrik determinant: Bir determinantın elemanlarının arasında,

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}^T \text{ ya da } a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

bağıntısı varsa determinanta simetrik determinant denir.

Yarı simetrik determinant: Bir determinantın elemanlarının arasında,

$$\mathbf{\Delta}^T = -\mathbf{\Delta} \text{ ya da } a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

bağıntısı varsa determinanta yarı simetrik determinant denir.

Sıfır Determinant Koşulları

- Tüm satır (sütun) elemanları sıfır ise
- İki satır (sütun) elemanları eşit ise
- Bir satır (sütun) bir diğer satır (sütun) elemanlarının katı ise

Vander Monde Determinantı :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

şeklindeki determınantlara denir.

Örnek(*Vandermonde Determinant*):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Birinci sütun 2. ve 3. Sütunlardan çıkarılıp birinci satıra göre determinant açılırsa;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Teorem(*Cramer Kuralı*): *n* bilinmeyenli ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) *n* adet doğrusal denklem sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Eğer $\Delta = \det\left[a_{ij}\right] \neq 0$ ise sistemin tek bir çözümü vardır. Bu çözüm;

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$ olup burada Δ_i, A katsayılar matrisinin i. (inci) sütunun $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sayıları ile yer değiştirilmesi sonucu elde edilen matrisin determinantını göstermektedir.

İspat: Katsayılar matrisi $\Delta \neq 0$ olsun. Bu durumda A matrisinin tersi vardır ve $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} ekA$ yazılabilir. Böylece sistemin çözümü,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_1C_{11} & b_2C_{21} & \cdots & b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} & b_2C_{22} & \cdots & b_nC_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1C_{1n} & b_2C_{2n} & \cdots & b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Bu yüzden, Ayrıca; son vektörün i. bileşeni, Δ_i nin i sütunu boyunca açılmış halidir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 / \Delta \\ \Delta_2 / \Delta \\ \vdots \\ \Delta_n / \Delta \end{bmatrix}$$

Determinantlar ve Gauss-Jordan Eleminasyonu

Determinantlar üzerinde tanımlanan üç elemanter işlem şunlardır:

a. Bir satırın herhangi bir skalere bölünmesi,

b. Satırların yer değişimi,

c. Bir satırın başka bir satıra eklenmesi.

Boyutu 2×2 olan bir $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi ele alınsın. Bu matrisin determinantı $\det \mathbf{A} = ad - bc$ ‘dir.

a. Eğer $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a/k & b/k \\ c & d \end{bmatrix}$ ise $\det \mathbf{B} = \dfrac{a}{k} d - \dfrac{b}{k} c = \dfrac{1}{k} \det \mathbf{A}$ ‘dır.

b. Eğer $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ ise, $\det \mathbf{B} = cb - da = -\det \mathbf{A}$’dır.

c. Eğer $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix}$ ise,

$$\det \mathbf{B} = (a+kc)d - (b+kd)c = ad + kcd - bc - kdc = \det \mathbf{A}\text{ ’dır.}$$

Şimdi de herhangi bir boyuttaki kare matrisler için elemanter satır işlemlerinin determinant üzerindeki etkisi incelensin.

a. Bir satırın herhangi bir skalere bölünmesi:

Eğer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_i & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n & - \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_i/k & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n & - \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$\det \mathbf{B} = (1/k)\det \mathbf{A}$ ’dır.

b. Satırların yer değişimi: Aşağıdaki örnekte incelenmiştir.

Örnek: Aşağıdaki matrisler ele alınsın.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

B matrisi, **A** matrisinin ilk iki satırının yer değiştirilmesiyle elde edilmiştir. Buna göre $\det \mathbf{B}$, $\det \mathbf{A}$ cinsinden ifade edilsin.

A matrisindeki her bir P örüntüsü, **B** matrisindeki karşılık gelen örüntü P_{swap} olarak düşünülebilir. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

P $\qquad\qquad$ P_{swap}

Bu iki örüntü aynı sayıları içerse de, P_{swap}'taki ters dönüşüm sayısı diğerinden bir eksiktir. Bu nedenle $\operatorname{prod} P_{swap} = \operatorname{prod} P$ 'dir fakat $\operatorname{sgn} P_{swap} = -\operatorname{sgn} P$ 'dir. Buradan görüleceği gibi bu iki örüntü, ilgili determinanta farklı yönlerde katkı yapmaktadır. Bu bulgular **A** matrisindeki tüm örüntüler için geçerli olduğundan,

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$$

sonucuna varılabilir.

Örnek: Eğer **A** matrisi iki eşit satıra sahipse det **A** ile ilgili ne söylenebilir?

Eşit olan iki satır yer değiştirilip, elde edilen yeni matrise B denirse,

$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$ olur.

Tanım: $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. *A* matrsinin ek matrisi kofaktör matrisinin ***transpozu*** olarak tanımlanır ve ek*A* ile gösterilir.

$$ekA = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{21} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorem: $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. O zaman

$$A(ekA) = (\det A) I_n = (ekA) A.$$

İspat:

$$\begin{aligned} (AekA)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (ekA)_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj}(A) \\ &= \delta_{ik} \det A \\ &= ((\det A) I_n)_{ik} \end{aligned}$$

Teorem: *Üçgen Matrisin Determinantı*

Alt ya da üst üçgen matrisin determinantı, köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

Teorem: *Blok matrisin determinantı*

Eğer $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ ve burada **A** ve **C** matrisleri de kare matrisler ise,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{C})$$

Aynı şekilde,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{C}) \text{ 'dir.}$$

Fakat

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{D}) - (\det \mathbf{B})(\det \mathbf{C})$$

formülü her zaman geçerli değildir.

İspat: Eğer P_A, **A** matrisinde bir örüntü ve P_C de **C** matrisinde bir örüntü ise, bunların birleşimi $P_M = (P_{A,} P_C)$, **M** matrisinde bir örüntüdür $P_M = (\text{prod}P_A)(\text{prod}P_C)$ ve $\text{sgn}\, P_M = (\text{sgn}P_A)(\text{sgn}P_C)$ eşitlikleri geçerlidir. P_M'deki ters dönüşüm sayısı, P_A ve P_C'dekilerin toplamına eşittir. Buna karşılık, **M** matrisinde çarpımı sıfırdan farklı herhangi bir P örüntüsü, **M** matrisindeki sıfır blok matrisinden seçilemeyeceği için, bu örüntü $P_M = (P_A, P_C)$ formundadır.

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{C}) = \left(\sum_{P_A} (\text{sgn}\, P_A)(\text{prod}P_A) \right) \left(\sum_{P_c} (\text{sgn}\, P_C)(\text{prod}P_C) \right)$$

$$= \sum_{(P_A, P_C)} (\text{sgn}\, P_A)(\text{sgn}\, P_C)(\text{prod}P_A)(\text{prod}P_C)$$

$$= \sum_{P_M} (\text{sgn}\, P_M)(\text{prod}P_M) = \det \mathbf{M}$$

Teoerem: *Transpozun Determinantı*

Eğer A matrisi bir kare matris ise,

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A} \ .$$

Bu simetri özelliği oldukça kullanışlıdır. Determinantın satırlar cinsinden ifade edilen herhangi bir özelliği sütunlar için de geçerlidir (ya da tam tersi).

Teorem: *Determinantın Satırlara ve Sütunlara Göre Doğrusallığı*

n adet bileşene sahip, sabitlenmiş satır vektörleri $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, ..., \mathbf{v}_n$ ele alınsın. Bu durumda,

$$T(\mathbf{x}) = \det \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_{i-1} & - \\ - & \mathbf{x} & - \\ - & \mathbf{v}_{i+1} & - \\ & \vdots & \\ & \mathbf{v}_n & \end{bmatrix}, \ \Re^{1\times n} \text{ ‘den } \Re \text{ ‘ye}$$

fonksiyonu doğrusal dönüşümdür. Bu özelliğe determinantın *i*-inci satıra göre doğrusallık özelliği denir. Determinant aynı şekilde tüm sütunlara göre de doğrusaldır.

Yukarıdaki teoreme göre T dönüşümünün doğrusallığı, $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ ve $T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$ denklemleriyle ya da

$$\det \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{x}+\mathbf{y} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n & - \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{x} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n & - \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{y} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n & - \end{bmatrix}$$

ve

$$\det \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & k\mathbf{x} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n & - \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{x} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_n & - \end{bmatrix}$$

ile ifade edilebilir. Bu denklemlerde *i*-inci satır haricindeki tüm satırlar sabitlenmiş, **x** ve **y** *n* elemana sahip rastgele seçilmiş vektörler ve *k* ise rastgele seçilmiş bir reel sayıdır.

Teorem: $A = [a_{ij}]$ ve eğer $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise, bu durumda

$$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

olur. Eğer $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$ ise $\det A = a_1.a_2 \ldots a_n$ dir. Bir t skaleri için tI_n matrisin determinantı $\det(tI_n) = t^n$ dir.

İspat: *n* boyutlu bir matrisin indirgenmesi kullanılır. Sonuç $n = 2$ için doğrudur. Şimdi $n > 2$ olsun ve sonucun $n-1$ boyutlu bir matris için doğru olduğu varsayılsın. Eğer A matrisi $n \times n$ tipinde bir matris ise detA birinci satıra göre açılırsa,

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}\cdots a_{nn}\right)$$

Eğer A üst üçgensel bir matris ise yukarıdaki teorem benzer biçimde kanıtlanır.

UYARI: $n\times n$ boyutlu bir A matrisinin determinantı genişletilmiş formu $n!$ işaretli $\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$ çarpımlarından oluştuğu gösterilebilir. Burada $i_1, i_2, \ldots, i_n$,$\left(1,2,3,\ldots,n\right)$ için permütasyonlardır. İşaretlerin 1 yada -1 olması $i_1, i_2, \ldots, i_n$ deki inversiyonlar sayısının tek yada çift olmasına göredir. $i_r > i_s$ olduğu halde $r < s$ olduğunda bir inversion gerçekleşir. (İspatı kolay değildir.)

Teorem: Bir A matrisinde $i = 1,2,3\ldots,n$ için (i-inci satır açılımı)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$$

$j = 1,2,3\ldots,n$ için (j-inci sütun açılımı)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A)$$

biçimindedir.

UYARI: $(-1)^{i+j}$ ifadesi satranç tahtasındaki modele uymaktadır;

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \ldots \\ - & + & - & \ldots \\ + & - & + & \ldots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Teorem: $\det A^T = \det A$

Teorem: Bir matrisin iki satısı eşit ise matrisin determinantı sıfıra eşit olur.

Tanım: Bir A matrsinin (i,j) kofaktörü $C_{ij}\left(A\right)$ ile gösterilir ve $C_{ij}\left(A\right) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$ ile tanımlanır.

Teorem: $i = 1,2,3\ldots,n$ için,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A)$$

$j = 1,2,3\ldots,n$ için,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A)$$

Teorem: $n\times n$ boyutlu bir A matrisi olsun. Bu durumda;

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj}(A) = 0$ eğer $i \neq k.$

(b) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ik}(A) = 0$ eğer $\mathrm{j} \neq k.$

İspat: Eğer A $n \times n$ boyutlu bir matris ise bu matrisin *i.* satırıyla ***k.*** **s**atırın yer değiştirmesiyle elde edilen yeni matris *B* olsun. O zaman $\det B = 0$ olur. Çünkü iki satır özdeştir. $\det B$ k satırı boyunca açılırsa,

$$0 = \det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} C_{kj}(B)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj}(A)$$

elde edilir.

Teorem: Determinant satır ve sütunların her birinin doğrusal fonksiyonudur. Örneğin:

(a) $$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}^{'} & a_{12}+a_{12}^{'} & a_{13}+a_{13}^{'} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{'} & a_{12}^{'} & a_{13}^{'} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(b) $$\begin{vmatrix} ta_{11} & ta_{12} & ta_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sonuç: Bir satırın bir katı başka bir satıra eklenirse, determinantın değeri değişmez. Benzer kural sütunlar içinde geçerlidir.

İspat: 3×3 tipinde bir matris için bu durum gösterilecektir fakat ispat genellenebilir.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ta_{21} & a_{12}+ta_{22} & a_{13}+ta_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ta_{21} & ta_{22} & ta_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + t.0$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tanım: 3×3 boyutlu matrisin sütun vektörleri cinsinden determinantı

Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$ ise,

$$\det \mathbf{A} = \mathbf{u}.(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \text{ ‘dır.}$$

3×3 boyutlu bir matrisin tersi sadece ve sadece $\det \mathbf{A} \neq 0$ olduğunda alınabilir.

$\det \mathbf{A} = \mathbf{u}.(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ ifadesi **A** matrisinin bileşenleri cinsinden ifade edilirse,

$$\det \mathbf{A} = \mathbf{u}.(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Örnek: Aşağıda belirtilen fonksiyon

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & x_1 & 5 \\ 3 & x_2 & 6 \\ 4 & x_3 & 7 \end{bmatrix}$$

$\Re^3$ ‘ten $\Re$ ‘ye bir doğrusal dönüşüm müdür?

Çözüm:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & x_1 & 5 \\ 3 & x_2 & 6 \\ 4 & x_3 & 7 \end{bmatrix} = (6.4 - 3.7)x_1 + (2.7 - 5.4)x_2 + (5.3 - 2.6)x_3$$

$$= 3x_1 - 6x_2 + 3x_3$$

Fonksiyonun görüntüsü, tanım kümesinin doğrusal kombinasyonu olduğu için T bir doğrusal dönüşümdür.

3×3 boyutlu determinant, ikinci sütuna göre doğrusaldır. Aynı şekilde determinant diğer iki sütuna ve diğer üç satıra göre de doğrusaldır. Örneğin, üçüncü sütuna göre doğrusallık,

$$L(\mathbf{x}) = \det \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ - & \mathbf{v}_2 & - \\ - & \mathbf{x} & - \end{bmatrix}$$

determinantının herhangi iki satır vektörü $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ için sütun vektörü $\mathbf{x}$'e göre doğrusal olduğu anlamına gelmektedir.

Ayrıca L'nin doğrusallığı denklemlerle

$$L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y}) \quad \text{ve} \quad L(k\mathbf{x}) = kL(\mathbf{x})$$

ya da

$$\det\begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ - & \mathbf{v}_2 & - \\ - & \mathbf{x}+\mathbf{y} & - \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ - & \mathbf{v}_2 & - \\ - & \mathbf{x} & - \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ - & \mathbf{v}_2 & - \\ - & \mathbf{y} & - \end{bmatrix}$$

ve
$$\det\begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ - & \mathbf{v}_2 & - \\ - & k\mathbf{x} & - \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1 & - \\ - & \mathbf{v}_2 & - \\ - & \mathbf{x} & - \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Determinantın Köşegen Elemanları