7. BÖLÜM

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Bir V vektör uzayını bir başka W vektör uzayına dönüştüren fonksiyonlar şu şekilde gösterilir:

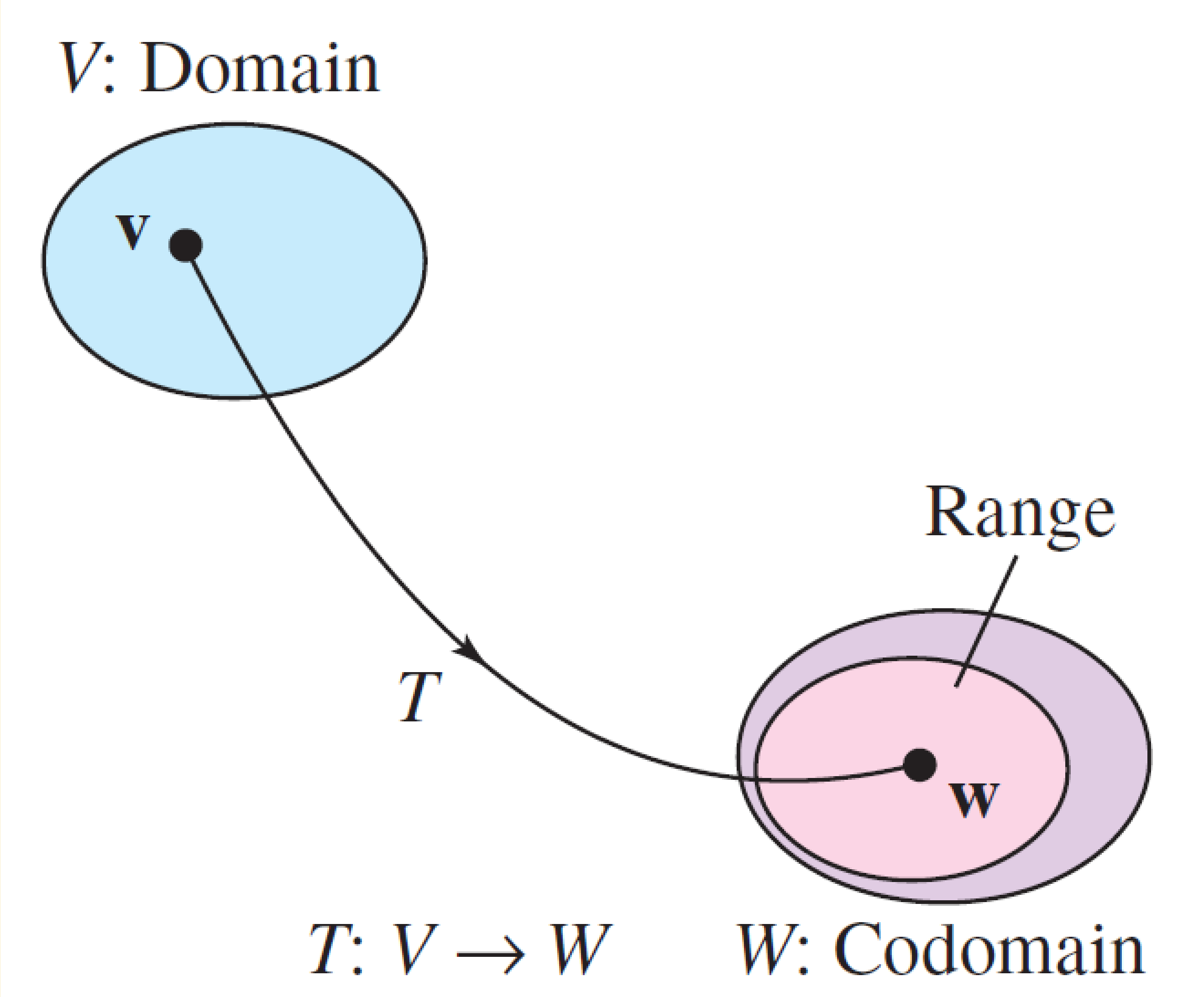
$$T : V \rightarrow W$$

Burada kullanılan terminoloji fonksiyonlarla aynıdır. Örneğin, V vektör uzayına T fonksiyonunun tanım kümesi denir. Eğer $\mathbf{v}$ vektörü, V vektör uzayının elemanı ve $\mathbf{w}$ vektörü de W vektör uzayının elemanı ise

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

$\mathbf{w}$ vektörü, T fonksiyonu için $\mathbf{v}$ vektörünün görüntüsüdür. V uzayında tanımlı tüm $\mathbf{v}$ vektörlerine T fonksiyonunun tanım kümesi, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ şeklinde tanımlanmış $\mathbf{w}$ vektörlerine de görüntü kümesi denir.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER



DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Örnek: $\Re^2$ de tanımlı herhangi bir $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vektörü için $T:\Re^2 \to \Re^2$ şu şekilde tanımlanmıştır:

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$$

a) $\mathbf{v} = (-1, 2)$ vektörünün görüntü kümesini

b) $\mathbf{w} = (-1, 11)$ vektörünün tanım kümesini bulunuz.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Çözüm:

a) $\mathbf{v} = (-1, 2)$ için,

$$T(-1,2) = (-1-2, -1+2(2))$$

$$= (-3, 3)$$

b) Eğer $T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) = (-1, 11)$ ise

$v_1 - v_2 = -1$

$v_1 + 2v_2 = 11$ olur.

Bu denklem sisteminin tek çözümü $v_1 = 3$ ve $v_2 = 4$ 'tür. Bu durumda $(-1, 11)$ 'in R^2'deki tanım kümesi $(3, 4)$ 'tür.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Tanım: ***Doğrusal Dönüşüm***

V ve *W* birer vektör uzayı olmak üzere,

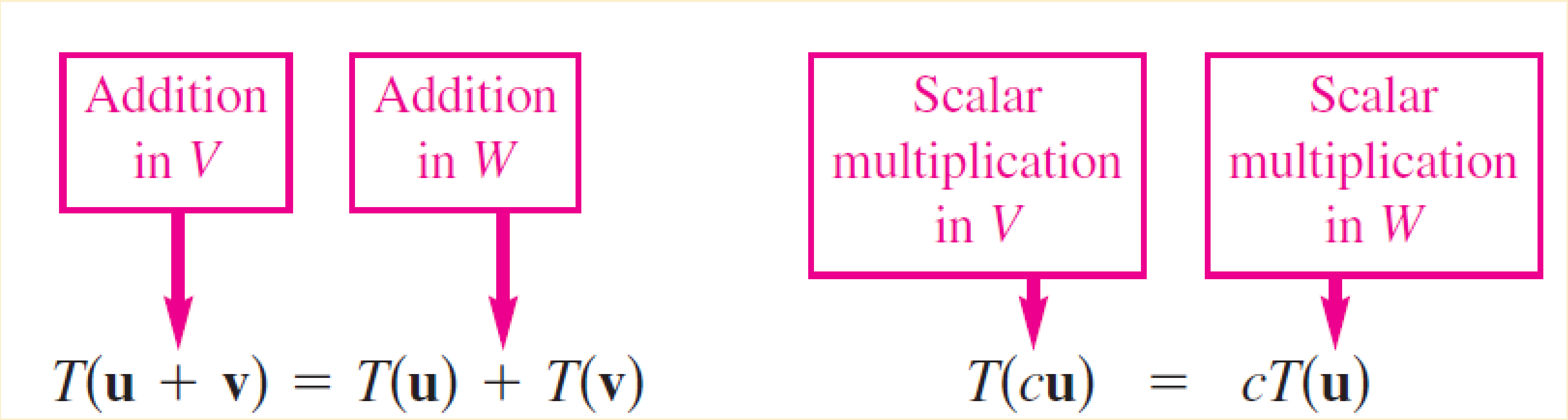
$$T : V \to W$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri her bir **u** ve **v** için sağladığında *V* vektör uzayını

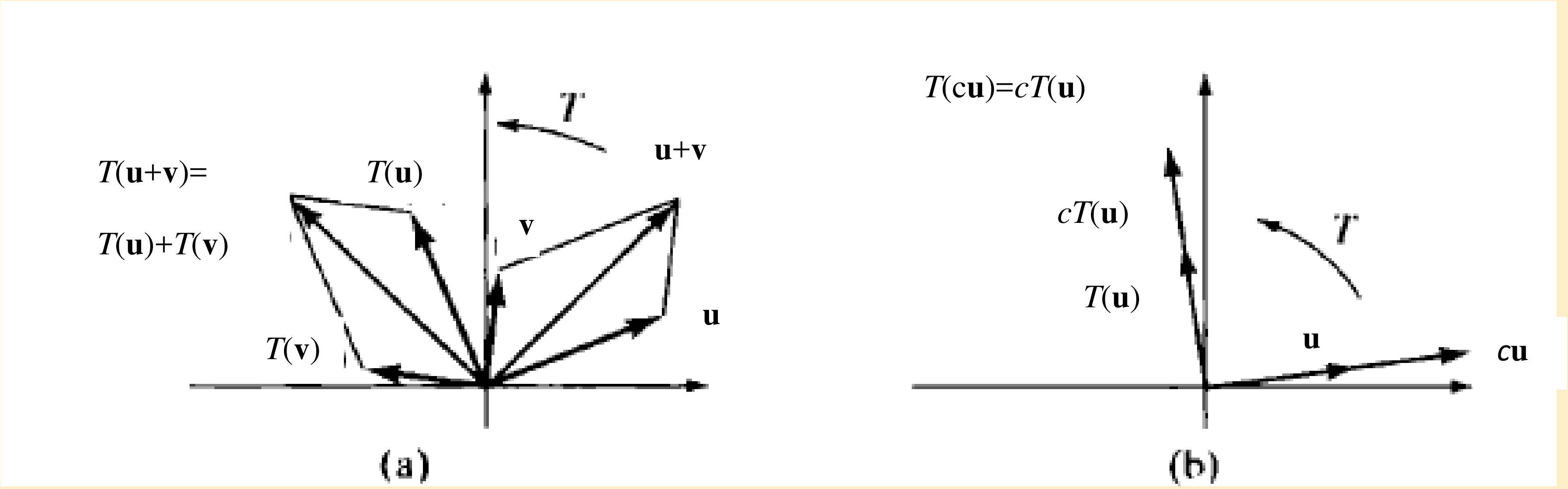
W vektör uzayına dönüştüren bir doğrusal dönüşümü tanımlar:

a. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$

b. $T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})$, tüm $c \in \Re$ için.



DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER



Yukarıdaki iki koşul birleştirilerek,

$$T(c\mathbf{u}+d\mathbf{v})=cT(\mathbf{u})+dT(\mathbf{v})$$

şeklinde doğrusal olma koşulu olarak ifade edilebilir.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Örnek: T, vektörlere $\mathbf{u}_0$ ekleyen bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm doğrusal mıdır?

Çözüm:

$$T(\mathbf{u})=\mathbf{u}+\mathbf{u}_0$$

$$T(\mathbf{v})=\mathbf{v}+\mathbf{u}_0$$

olup, V uzayında

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{u}_0$$

ve W uzayında

$$T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=\mathbf{u}+\mathbf{u}_0+\mathbf{v}+\mathbf{u}_0$$

olur ve doğrusallık şartı sağlanmaz.

Sıfır Dönüşüm-Birim Dönüşüm

Teorem:

İki vektör uzayı V ve W için, $T : V \rightarrow W$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$T\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{0} \quad , \quad \text{tüm } \mathbf{v} \in V \text{ için}$$

Bu durumda T bir doğrusal dönüşümdür ve sıfır dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem:

Bir vektör uzayı V için $T : V \rightarrow V$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$T\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}, \quad \text{tüm } \mathbf{v} \in V \text{ için}$$

Bu durumda T bir doğrusal dönüşümdür ve V uzayının birim dönüşümü olarak adlandırılır

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Doğrusal Dönüşümün Özellikleri:

$T:V \to W$ ve **u** ile **v**, V'de tanımlı birer vektör olmak üzere, doğrusal dönüşüm T

şu özellikleri sağlamaktadır:

1. $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$

   İspat: $T(\mathbf{0})=T(0\mathbf{0})=0T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ $T(0)=T(0\mathbf{v})=0T(\mathbf{v})=0$

2. $T(-\mathbf{v})=-T(\mathbf{v})$

   İspat: $T(-\mathbf{v})=T((-1)\mathbf{v})=(-1)T(\mathbf{v})=-T(\mathbf{v})$

3. $T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v})$

   İspat: $T(u-v)=T(u+(-1)v)=T(u)-T(v)$

4. Eğer $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n$ ise,

   $T(\mathbf{v})=c_1T(\mathbf{v}_1)+c_2T(\mathbf{v}_2)+\ldots+c_nT(\mathbf{v}_n)$

Bir Matris ile Tanımlanan Doğrusal Dönüşüm

Bir **A** matrisi, bir **x** vektörüyle çarpıldığında bu işlem **x**'i bir başka vektör **Ax**'e dönüştürür. İşlemin girdisi **x** vektörü, çıktısı **Ax** vektörüdür. Bu dönüşüm işleminin mantığı fonksiyonlarla aynıdır. Fakat burada amaç tüm **x** vektörlerindeki değişimi görmektir. Her bir **x** vektörü, **A** matrisi ile çarpılarak aslında **x** vektörünün tanımlı olduğu tüm uzay dönüştürülmüş olur.

Bir Matris ile Tanımlanan Doğrusal Dönüşüm

Boyutlu $m \times n$ olan bir **A** matrisi ele alınsın. Aşağıdaki gibi tanımlanan bir T fonksiyonu,

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

$\Re^n$ ’den $\Re^m$ ’e bir doğrusal dönüşümdür. Burada $m \times n$ boyutlu bir matrisle çarpım

kuralı dikkate alınarak $\Re^n$ uzayındaki vektörler $n \times 1$ boyutlu, $\Re^m$ uzayındaki vektörler de $m \times 1$boyutlu vektörlerle temsil edilmektedir.

$m \times n$ boyutlu sıfır matrisi $\Re^n$ ’den $\Re^m$ ’e sıfır dönüşümünü, $n \times n$ boyutlu birim matris de

$\Re^n$ ’den $\Re^n$ ’e birim dönüşümü tanımlamaktadır.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Teorem:

Bir **A** matrisinin boyutu $m \times n$ olmak üzere, verilen bir **v** vektörü için,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \Re^n \qquad\qquad T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bir T dönüşümü $\Re^n$ ’den $\Re^m$ ’e tanımlı bir doğrusal dönüşümdür.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

İspat:

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Re^n$ ve c bir skaler olmak üzere, matris çarpımları ile ilgili özellikler kullanılarak;

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

ve

$$T(c\mathbf{u}) = \mathbf{A}(c\mathbf{u}) = c\mathbf{A}(u) = cT(\mathbf{u})$$

olur.

Bir Matris ile Tanımlanan Doğrusal Dönüşüm

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

$\Re^n$'de

bir vektör

$\Re^m$'de

bir vektör

Bir Matris ile Tanımlanan Doğrusal Dönüşüm

ya da

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots a_{1n}v_n \\
u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots a_{2n}v_n \\
&\vdots \\
u_m &= a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots a_{mn}v_n
\end{aligned}
$$

Burada u_i'ler v_j'lerin doğrusal birer fonksiyonudur.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Örnek: Bir doğrusal dönüşüm $T:\Re^n \rightarrow \Re^m$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Buna göre aşağıdaki matrisler için doğrusal dönüşümün boyutlarını bulunuz.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER

Çözüm:

a) Matrisin boyutu 3×3 olduğu için bu dönüşüm $\Re^3$ ‘ten $\Re^3$ ’e tanımlıdır.

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

R^3 ’te bir vektör	R^3 ’te bir vektör

b)Matrisin boyutu 3×2 olduğu için bu dönüşüm $\Re^2$ ‘den $\Re^3$ ’e tanımlıdır.

c)Matrisin boyutu 2×4 olduğu için bu dönüşüm $\Re^4$ ‘den $\Re^2$ ’e tanımlıdır.

Örnek: Doğrusal dönüşüm tanımlamayan bazı fonksiyonlar

a. $f(x) = \sin x$, $\Re$'den $\Re$'ye doğrusal bir dönüşüm değildir.

Çünkü $\sin(x_1 + x_2) \neq \sin x_1 + \sin x_2$. Örneğin,

$$\sin[(\pi/2) + \pi/3] \neq \sin(\pi/2) + \sin(\pi/3)$$

b. $f(x) = x^2$, $\Re$'den $\Re$'ye doğrusal bir dönüşüm değildir.

Çünkü $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$

c. $f(x) = x + 1$, $\Re$'den $\Re$'ye doğrusal bir dönüşüm değildir.

Çünkü

$$f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + 1$$

Burada

$$f(x_1) + f(x_2) = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = x_1 + x_2 + 2$$

Böylece

$$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2).$$

Matrislerle Tanımlanan Doğrusal Dönüşümler

A matrisinin boyutu $m \times n$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan T fonksiyonu

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

$\Re^n$'den $\Re^m$'ye doğrusal bir dönüşümdür.

- **Bir Noktanın Dönüşümü**

Aşağıdaki **A** matrisi ile tanımlanan $T:\Re^2 \to \Re^2$ dönüşümü

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\Re^2$'de tanımlı tüm vektörleri, orijine göre saat yönünün tersine θ açısı kadar döndürme özelliğine sahiptir.

İspat: T doğrusal bir dönüşümdür. $\mathbf{v}=(x, y)$ vektörü de $\Re^2$'de tanımlı olsun. Kutupsal koordinatlar kullanılarak **v** vektörü

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (x, y) \\
&= (r\cos\alpha, r\sin\alpha)
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada *r*, **v** vektörünün uzunluğu ve α ise pozitif *x*-ekseni ile **v** vektörü arasındaki saat yönünün tersi olan açıdır. Doğrusal dönüşüm *T*, **v** vektörüne uygulanarak,

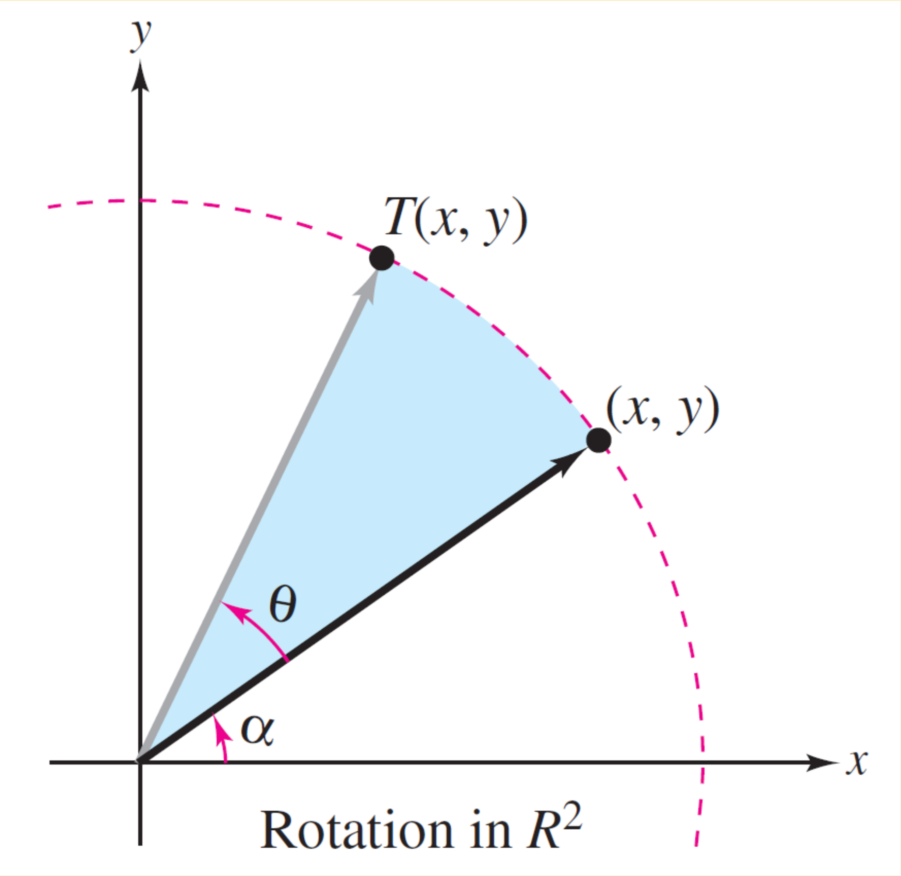
$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{v}) &= \mathbf{A}\mathbf{v} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$T(\mathbf{v})$ vektörünün uzunluğu $\mathbf{v}$ vektörü ile aynıdır. Pozitif x-ekseni ile $T(\mathbf{v})$ arasındaki açı

$$\theta+\alpha$$

olduğu için $T(\mathbf{v})$ dönüşümü aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi $\mathbf{v}$ vektörünün θ açısı kadar saat yönünde döndürülmesini sağlar.

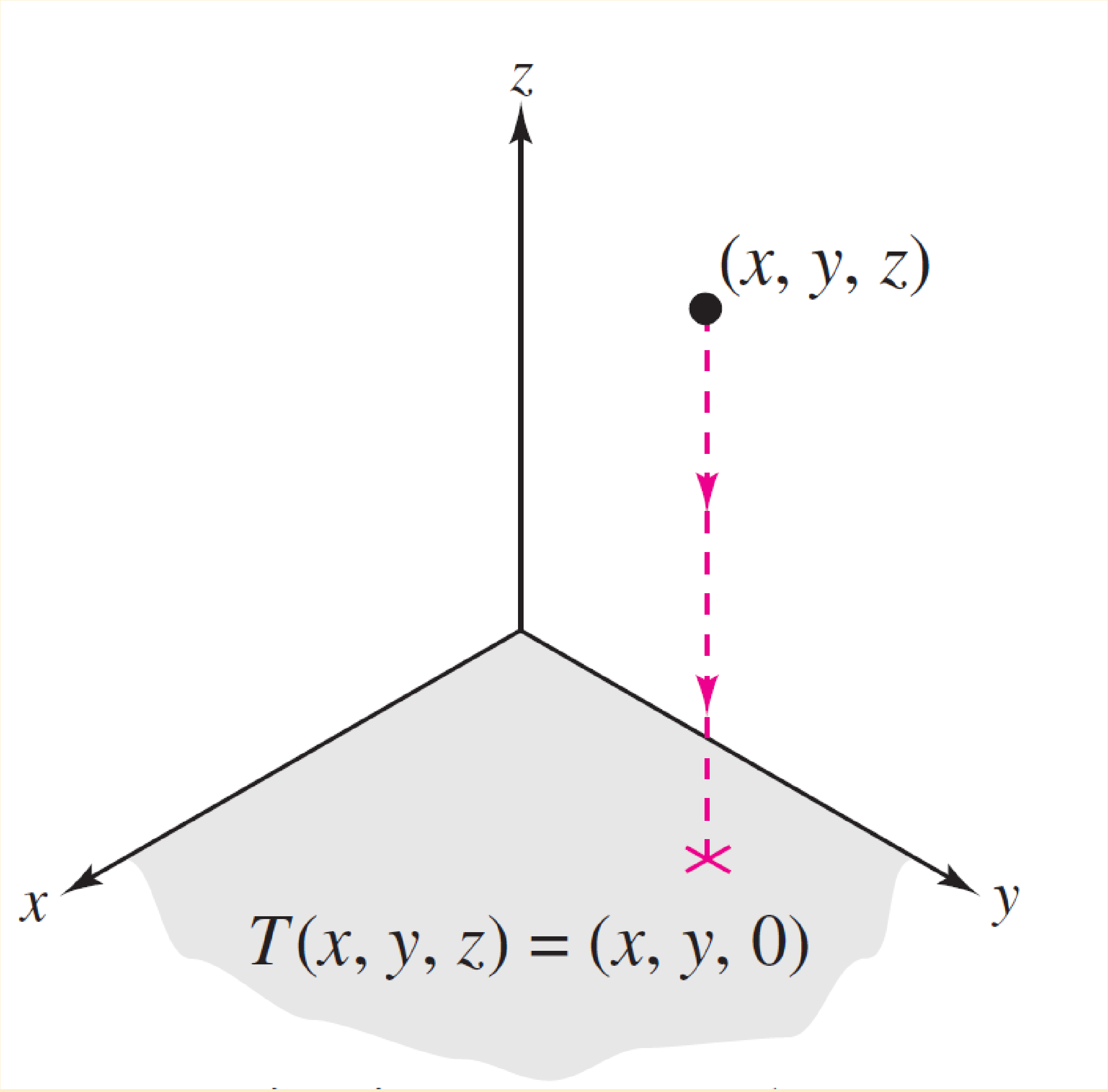


- **Bir Noktanın İzdüşümü**

Aşağıdaki A matrisi ile gösterilen $T:\Re^3 \to \Re^3$ dönüşümüne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Re^3$'te izdüşüm denir. Eğer $\mathbf{v} = (x, y, z)$ $\Re^3$'te bir vektör ise $T(\mathbf{v}) = (x, y, 0)$'dır. Bir başka deyişle, T dönüşümü $\Re^3$'te tanımlı her bir vektörün *xy*-düzlemine dik izdüşümünü almaktadır.



z
(x, y, z)
x
y
T(x, y, z) = (x, y, 0)

- **Matrisin Transpozu**

$T: M_{m,n} \to M_{n,m}$ fonksiyonu, boyutu $m \times n$ olan $\mathbf{A}$ matrisini transpozuna atayan bir fonksiyon olsun.

$$T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$$

Burada T doğrusal bir dönüşümdür.

İspat: A ve B boyutları $m \times n$ olan iki matris olsun.

$$T(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = T(\mathbf{A}) + T(\mathbf{B})$$

ve

$$T(c\mathbf{A}) = (c\mathbf{A})^T = c(\mathbf{A}^T) = cT(\mathbf{A})$$

olur. Böylece T, $M_{m,n}$ ’den $M_{n,m}$ ’ye doğursal bir dönüşümdür.

Doğrusal Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü

Herhangi bir doğrusal dönüşüm $T:V \rightarrow W$ için V'deki sıfır vektörü W'daki sıfır vektörüne atanmaktadır. Bir başka ifadeyle $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. Burada akla gelen ilk soru $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$ koşulunu sağlayan başka **v** vektörlerinin bulunup bulunmadığıdır. Bu yapıdaki tüm bileşenlerin tamamına T'nin çekirdeği denir.

Tanım: *Bir Doğrusal Dönüşümün Çekirdeği*

$T:V \rightarrow W$ bir doğrusal dönüşüm olsun. V'de $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$ koşulunu sağlayan tüm **v** vektörleri kümesine T'nin çekirdeği denir ve ker(T) ile gösterilir.

Örnek: Boyutu 3×2 olan bir **A** matrisini transpozuna atayan $T: M_{3,2} \to M_{2,3}$ dönüşümünü çekirdeğini bulunuz.

Verilen bu doğrusal dönüşüm için $M_{3,2}$'de 3×2 boyutlu sıfır matrisi transpozu $M_{2,3}$'te yine sıfır matrisi olan yegane matristir. Böylece T'nin çekirdeği $M_{3,2}$'de yer alan sıfır matrisidir.

Örnek:

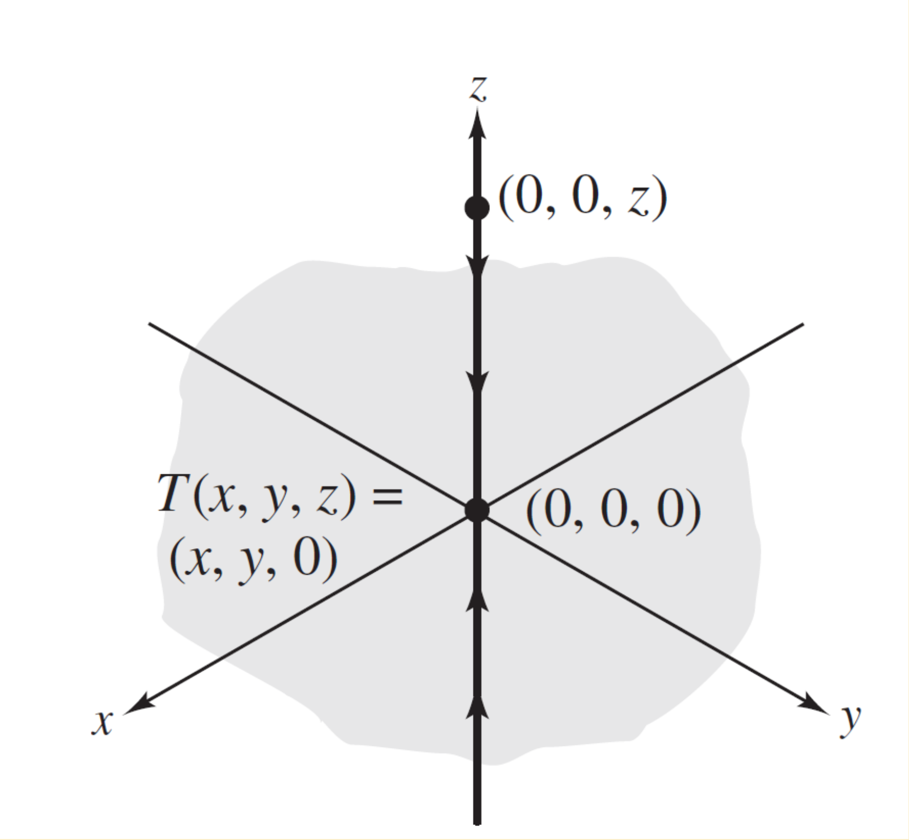
a. $T : V \rightarrow W$ sıfır dönüşümünün çekirdeği V'den oluşmaktadır. Çünkü V'deki tüm **v** vektörleri, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ koşulunu sağlamaktadır. Böylece ker(T)=V olur.

b. $T : V \rightarrow W$ birim dönüşümünün çekirdeği sadece sıfır vektöründen oluşmaktadır. $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$

Örnek: $T(x,y,z)=(x,y,0)$ ile gösterilen izdüşüm $T:\Re^3 \to \Re^3$'ün çekirdeğini bulunuz.

Bu doğrusal dönüşüm $\Re^3$'te bir vektör olan (x,y,z)'yi xy-eksenindeki $(x,y,0)$ vektörüne iz düşürmektedir. Bu durumda çekirdek, z-ekseninde yer alan tüm vektörlerden oluşmaktadır.

$$\ker(T)=\{(0,0,z): z \text{ bir reel sayidir}\}$$



Teorem: *Çekirdek V'nin bir alt uzayıdır*

$T:V\rightarrow W$ doğrusal dönüşümünün çekirdeği, V tanım kümesinin bir alt uzayıdır.

İspat: ker(T)'nin, *V*'nin boş olmayan bir altkümesi olduğu bilinmektedir. Bu durumda ker(T)'nin *V*'nin alt uzayı olduğu, vektörlerin toplamı ve skaler çarpımı altında kapalılığı ile ispatlanabilir. **u** ve **v**, T'nin çekirdeğinde yer alan iki vektör olsun. O halde $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ sonucu elde edilir ki bu **u**+**v**'nin çekirdekte yer aldığını göstermektedir. Aynı zamanda *c* bir skaler olmak üzere $T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})=c\mathbf{0}=\mathbf{0}$ 'dır. *c***u** da çekirdekte yer almaktadır.

Teorem: $T:\Re^n \to \Re^m$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ile verilen doğrusal bir dönüşüm olsun. Bu durumda T'nin çekirdeği $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denklem sisteminin çözüm uzayına eşittir.

Doğrusal Dönüşümün Görüntüsü

Çekirdek, bir doğrusal dönüşümle alakalı iki kritik alt uzaydan bir tanesidir. Diğeri ise görüntüdür ve range(T) ile gösterilir. $T: V \rightarrow W$ dönüşümünün görüntüsü, V'deki vektörleri görüntüleyen W'daki tüm $\mathbf{w}$ vektörlerinin kümesidir.

$$\text{range}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v}, V'\text{de yer almaktadir}\}$$

Teorem: *T'nin görüntüsü W'nun alt uzayıdır.*

$T: V \to W$ doğrusal dönüşümünün görüntüsü, W'nun alt uzayıdır.

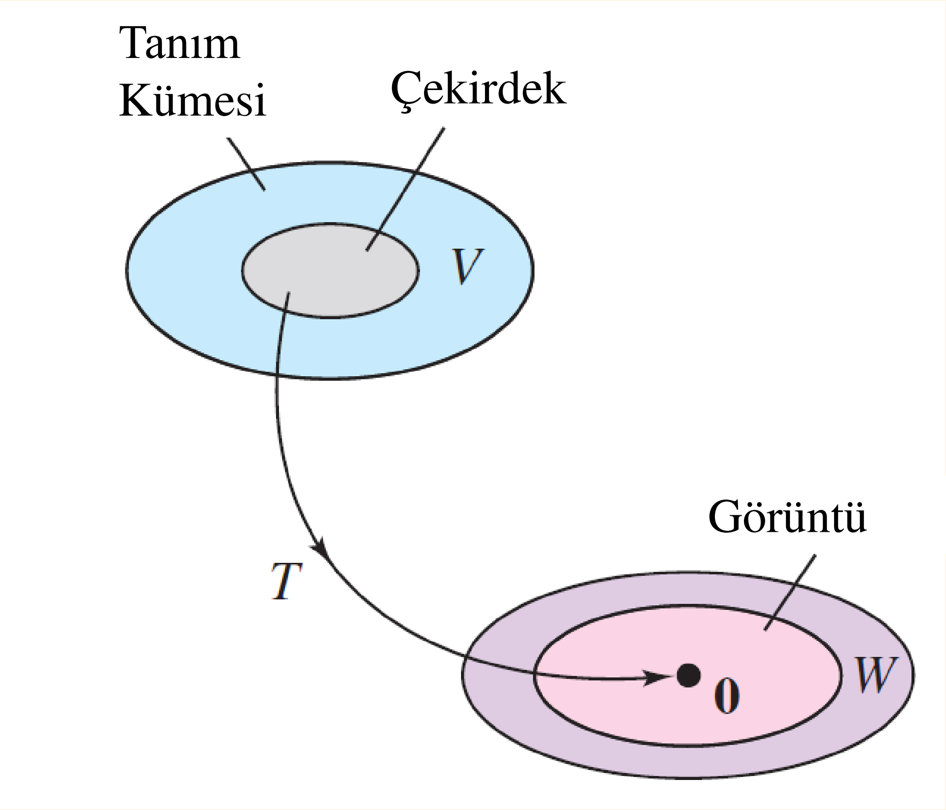
İspat: T'nin görüntüsü boş küme değildir. Çünkü $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ile, görüntünün sıfır vektörünü içerdiği anlaşılmaktadır. Vektör toplamı altında kapalılığını göstermek için, $T(\mathbf{u})$ ve $T(\mathbf{v})$ T'nin görüntüsünde yer alan iki vektör olsun. **u** ve **v**, V'de yer aldıkları için **u+v** de V'de yer alır. Böylece

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

toplamı T'nin görüntüsündedir.

Skaler çarpım altında kapalılığı göstermek için $T(\mathbf{u})$, T'nin görüntüsünde yer alan bir vektör ve *c* bir skaler olsun. **u**, V'de yer aldığı için c**u** da V'de yer alır. Böylece $cT(\mathbf{u}) = T(c\mathbf{u})$, T'nin görüntüsünde yer alır.

Not: $T: V \rightarrow W$ doğrusal dönüşümünün çekirdeği ve görüntüsü sırasıyla V ve W'nun alt uzaylarıdır.



Teorem: $T:\Re^n \to \Re^m$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ ile verilen doğrusal bir dönüşüm olsun. **A** matrisinin sütun uzayı, T'nin görüntüsüne eşittir.

Doğrusal Dönüşümün Rankının ve Boşluğunun Tanımı

$T:V \to W$ bir doğrusal dönüşüm olsun. T'nin çekirdeğinin boyutuna boşluk denir ve $\text{nullity}(T)$ ile gösterilir. T'nin görüntüsünün boyutuna rank denir ve $\text{rank}(T)$ ile gösterilir.

Teorem: *Rank ve boşluğun toplamı*

$T: V \rightarrow W$, n-boyutlu vektör uzayı V'den W vektör uzayına tanımlı doğrusal bir dönüşüm olsun. Bu durumda görüntü ve çekirdeğin boyutlarının toplamı, tanım kümesinin boyutuna eşittir.

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = n$$

ya da

$$\text{boyut(görüntü)} + \text{boyut(çekirdek)} = \text{boyut(tanım kümesi)}$$

İspat: T dönüşümü, boyutu $m \times n$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisi ile tanımlansın. $\mathbf{A}$ matrisinin rankı r olmak üzere,

rank(T) = boyut(T'nin görüntüsü) = boyut(sütun uzayı) = rank($\mathbf{A}$) = r

Aynı zamanda,

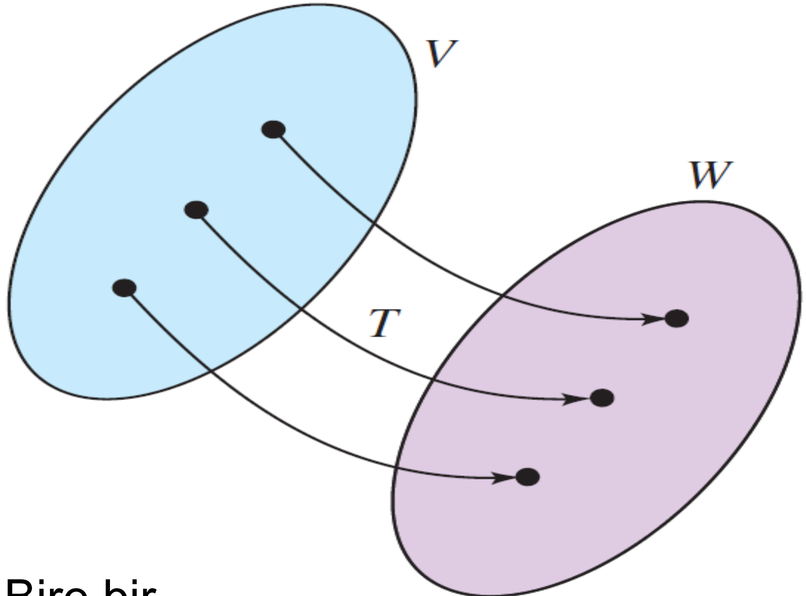
nullity(T) = boyut(T'nin çekirdeği) = boyut($\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 'ın çözüm uzayı) = $n - r$

Böylece,

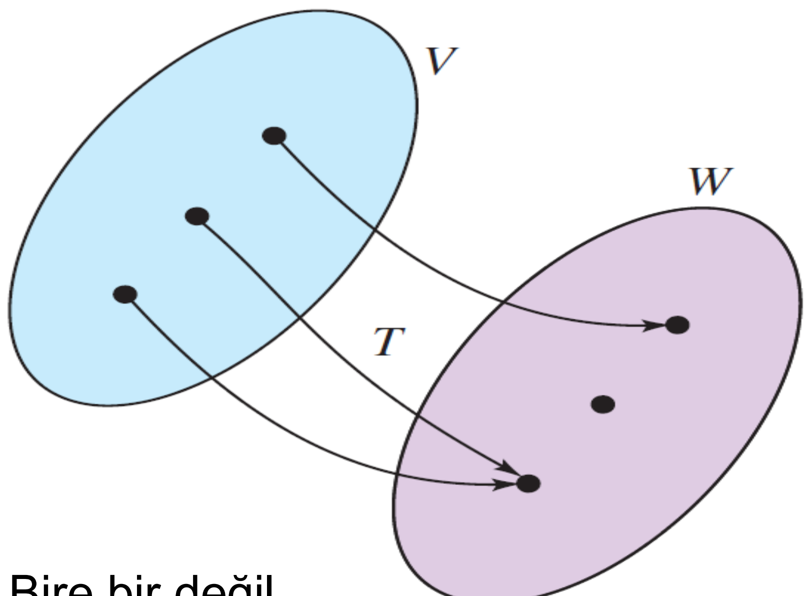
$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = r + (n - r) = n$$

Bire Bir ve Örten Doğrusal Dönüşümler

Bu bölümde cevaplanması gereken ilk soru: doğrusal bir dönüşümün tanım kümesinde yer alan ne kadar vektörün sıfır vektörüne atandığıdır. Eğer sıfır vektörü sadece $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ olan **v** vektörü ise, T bire birdir. $T : V \rightarrow W$ fonksiyonu, aşağıdaki şekilde de gösterildiği gibi görüntü kümesinde yer alan her bir **w** vektörünün ön görüntüsü tek bir vektörden oluştuğu durumlarda bire birdir. Aynı zamanda buna denk olarak, T sadece ve sadece V'de yer alan tüm **u** ve **v** için $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ ile **u** = **v** geçerli ise bire birdir.



Bire bir



Bire bir değil

Teorem: *Bire bir doğrusal dönüşümler*

$T:V\rightarrow W$ doğrusal bir dönüşüm olsun. *T* sadece ve sadece $\ker(T)=\{\mathbf{0}\}$ ise bire birdir.

İspat: *T*'nin bire bir olduğu varsayılsın. O halde $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$'ın tek çözümü $\mathbf{v}=\mathbf{0}$'dır. Bu durumda $\ker(T)=\{\mathbf{0}\}$ olur. Ters mantıkla, $\ker(T)=\{\mathbf{0}\}$ ve $T(\mathbf{u})=T(\mathbf{v})$ olsun. T doğrusal bir dönüşüm olduğu için,

$$T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$$

Buna göre **u** – **v**, *T*'nin çekirdeğinde yer almaktadır ve **0**'a eşit olmalıdır. Bu durumda **u** = **v** ve *T* de bire bir olmalıdır.

Bir $T:V\rightarrow W$ fonksiyonu, *W*'daki her eleman *V*'de bir ön görüntüye sahip olduğunda örtendir. Bir başka deyişle *T*, *W* üzerine *W*, *T*'nin görüntüsüne eşit olduğunda örtendir.

Teorem: *Örten Doğrusal Dönüşümler*

$T: V \to W$ doğrusal bir dönüşüm ve W'nun boyutu sonlu olsun. Bu durumda T, rankı W'nun boyutuna eşit olduğunda örtendir.

Teorem: *Bire bir ve Örten Doğrusal Dönüşümler*

$T: V \to W$ doğrusal bir dönüşüm, V ve W da n-boyutlu vektör uzayları olsun. Bu durumda T sadece ve sadece örten olduğunda bire birdir.

İspat: Eğer T bire bir ise, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ ve $\text{boyut}(\ker(T) = \{\mathbf{0}\}) = 0$'dır. Bu durumda,

boyut(T'nin görüntüsü) = n- $\text{boyut}(\ker(T)) = n = \text{boyut}(W)$

Sonuç olarak, T örtendir. Benzer şekilde eğer T örtense,

boyut(T'nin görüntüsü) = $\text{boyut}(W) = n$

Böylece T bire birdir.

Örnek: $T:\Re^n \to \Re^m$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ ile verilen doğrusal bir dönüşüm olsun. Buna göre *T*'nin boşluğunu ve rankını bularak *T*'nin bire bir mi örten mi olduğunu belirleyiniz.

$$\text{a)}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{d)}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T:\Re^n \rightarrow \Re^m$	Boyut(tk)	Boyut(görüntü) Rank(T)	Boyut(Çekirdek) Boşluk(T)	Birebir	Örten
a) $T:\Re^3 \rightarrow \Re^3$	3	3	0	Evet	Evet
b) $T:\Re^2 \rightarrow \Re^3$	2	2	0	Evet	Hayır
c) $T:\Re^3 \rightarrow \Re^2$	3	2	1	Hayır	Evet
d) $T:\Re^3 \rightarrow \Re^3$	3	2	1	Hayır	Hayır