

ÖRNEKLER-DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

1. Aşağıdaki denklem sisteminin çözümünü araştırınız.

$$x - y + z = 0$$

$$3x + y + 2z = 2$$

$$2x + y - z = -3$$

Çözüm: Gauss eliminasyon yöntemi kullanılabilir.

Artırılmış (genişletilmiş) matris,

$$[\mathbf{A} : \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} -3R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow (1/3)R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow (-1/4)R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3/4 & -3/2 \end{bmatrix} \text{ olup Echelon matrisi}$$

karşılık gelen sistem,

$$x - y + z = 0$$

$$4y - z = 2$$

$$-\frac{3}{4}z = -\frac{3}{2}$$

Buradan yerine koyma yöntemi ile,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Bir doğrusal denklem sistemi üzerine uygulanan elemanter işlemlerden sonra aşağıdaki Echelon matris elde edilmiştir. Sistemin çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Çözüm: Echelon matrise karşılık gelen sistem;

$$x + 4y - 2z + 2w = 3$$

$$2y + z + w = 4$$

$$w = -1$$

Son denklem w değişkenini belirlemiştir. Yerine konarak,

$$x + 4y - 2z - 2 = 3$$

$$2y + z - 1 = 4$$

Üç bilinmeyen, x, y, z için iki denklem vardır.

$3-2=1$ adet değişken serbest değişken olarak belirlenmelidir. Örneğin $y=t$ alınıp yapay değişken olarak belirlenirse, ikinci denklemden,

$$2t + z - 1 = 4 \text{ ise } z = 5 - 2t$$

ve ilk denklemden,

$$x + 4t - 2(5 - 2t) - 2 = 3 \text{ ise } x = 15 - 8t$$

ve çözüm kümesi;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 8t \\ t \\ 5 - 2t \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & x + 2y + 2z = 0 \\
& x - 4y - z = 0 \\
& 2x + y - z = 0 \\
& x + z = 0
\end{aligned}$$

Homojen denklem sistemini çözüünüz.

Çözüm: $m=4$ ve $n=3$ olup katsayılar matrisi,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -R_1 + R_2 \\ \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ -R_1 + R_4 \end{array} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow (-1/6)R_2 \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 3R_2 + R_3 \\ 2R_2 + R_4 \end{array} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 3R_2 + R_3 \\ 2R_2 + R_4 \end{array}
\end{aligned}$$

$r(\mathbf{A})=r=3=n$ olduğundan sıfır çözümden başka çözüm yoktur.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$