NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Varlık ve Teklik

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

formunda bir başlangıç-değer problemini göz önüne alalım.

Teorem (Varlık)

Eğer f, (t_0, x_0) merkezli bir

$$R = \{(t,x) \ : \ |t - t_0| \leq \alpha, \ \ |x - x_0| \leq \beta\} \tag{2}$$

dikdörtgeninde sürekli ise, bu durumda (1) başlangıç-değer problemi $|t - t_0| \leq \min(\alpha, \beta/M)$ için bir $x(t)$ çözümüne sahiptir. Burada M, R dikdörtgeni içinde $|f(t,x)|$ in maksimumudur.

Teorem (Teklik)

Eğer (2) ile tanımlı R diktörtgeninde f *ve* $\partial f/\partial x$ *sürekli ise, bu durumda (1) başlangıç-değer problemi* $|t - t_0| < \min(\alpha, \beta/M)$ *aralığında tek bir çözüme sahiptir.*

Teorem

Eğer f, $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < \infty$ *şeridinde sürekli ve orada*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \tag{3}$$

*eşitsizliğini (**Lipschitz koşulu**) sağlıyorsa, bu durumda (1) başlangıç-değer problemi* $[a, b]$ *aralığında tek bir çözüme sahiptir.*

Taylor Serisi Yöntemi

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Burada f önceden verilmiş iki değişkenli bir fonksiyon ve (t_0, x_0), çözüm eğrisinin geçtiği, verilen tek bir noktadır. bdp-nin bir *çözümü*, t_0 ın bir komşuluğundaki tüm t ler için $dx(t)/dt = f(t, x(t))$ ve $x(t_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x \longmapsto x(t)$ fonksiyonudur.
$x(t)$ çözümünü t nin bir fonksiyonu olarak veren bir *formül* olarak elde etmek yerine, genellikle fonksiyon değerlerinin

t_0	t_1	t_2	t_3	$\ldots$	t_m
x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_m

formunda bir tablosunu oluştururuz. Burada x_i, t_i deki *kesin* çözüm olan $x(t_i)$ nin hesaplanmış yaklaşık değeridir.

Örnek

Taylor serisi yöntemi için somut bir örnek alalım:

$$\begin{cases} x' = \cos t - \sin x + t^2 \\ x(-1) = 3. \end{cases}$$

Yöntemin temeli,

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \frac{h^3}{3!}x'''(t) + \frac{h^4}{4!}x^{(4)}(t) + \cdots \quad (4)$$

olarak yazılan x için Taylor serisidir. Burada görünen türevler diferensiyel denklemden elde edilebilir. Bunlar,

$$\begin{aligned} x'' &= -\sin t - x'\cos x + 2t \\ x''' &= -\cos t - x''\cos x + (x')^2\sin x + 2 \\ x^{(4)} &= \sin t - x'''\cos x + 3x'x''\sin x + (x')^3\cos x \end{aligned}$$

Örnek (Devam)

(4) formülünde h^4 ü içeren terimlere kadar olanı kullanmaya karar verirsek, almadığımız terimler h^5 ile başlayanlar olup, yöntemin toplamdaki **kesme hatasını** verir. Bu durumda ortaya çıkan sayısal yöntem **4 üncü** basamaktandır denir. (Eğer $h^n x^{(n)}(t)/n!$ e kadar olan terimler kullanılırsa, Taylor serisi yönteminin *basamağı* n dir.) Dikkat edilirse $\sin x$ gibi t ye göre türevi alınan terimlerde, onu $d\{\sin[x(t)]\}/dt$ olarak düşünüp, türevde *zincir kuralını* uyguluyoruz. Bu da kuşkusuz $x'', x''', \ldots$ formüllerinin karmaşıklığını doğurur. Sağ tarafta x in türevlerini içermeyecek şekilde $x'', x''', \ldots$ için formüller elde etmek için birçok yerleştirme yapmalıyız. Fakat, eğer formüller ardarda sırada kullanılırsa bunu yapmamız gerekmez. Çünkü, doğası gereği ardışıktırlar.

Örnek (Devam)

Aşağıda, (3) başlangıç-değer problemini çözmek için bir algoritma verilmiştir. $t = -1$ den başlayarak $h = 0.01$ adım uzunlukları alınmıştır. $[-1, 1]$ aralığında bir çözüm arzu ettiğimiz için 200 adım uygulamalıyız.

girdi $M \leftarrow 200; h \leftarrow 0.01; t \leftarrow -1.0; x \leftarrow 3.0$

çıktı $0, t, x$

$k = 1$ **den** M **ye döngü**

$x' \leftarrow \cos t - \sin x + t^2$

$x'' \leftarrow -\sin t - x' \cos x + 2t$

$x''' \leftarrow -\cos t - x'' \cos x + (x')^2 \sin x + 2$

$x^{(4)} \leftarrow \sin t + ((x')^3 - x''') \cos x + 3x'x'' \sin x$

$x \leftarrow x + h(x' + \frac{h}{2}(x'' + \frac{h}{3}(x''' + \frac{h}{4}(x^{(4)}))))$

$t \leftarrow t + h$

çıktı k, t, x

döngü sonu

Örnek (Devam)

Hesapladığımız çözümün hatası hakkında ne söyleyebiliriz? Taylor serisindeki h^5, $h^6, \ldots$ terimlerini almadığımız için, herbir adımda **yerel kesme hatası** $\mathcal{O}(h^5)$ dir. Bu nedenle yerel hataların davranışı $h \longrightarrow 0$ için Ch^5 e benzer olmalıdır. Ne yazık ki C yi bilmiyoruz. Fakat, $h = 10^{-2}$ olduğundan $h^5 = 10^{-10}$ dur. O halde, eğer şanslıysak, herbir adımdaki hata, boyut olarak kabaca 10^{-10} olmalıdır. Birkaç yüz adımdan sonra, bu küçük hatalar birikir ve sayısal çözümü mahveder. (İlki hariç) herbir adımda $x(t_k)$ nın x_k tahmini halihazırda hata içermektedir ve sonraki hesaplamalar bu hataları artırmaya devam eder. Bu uyarılar, bir diferensiyel denklemin sayısal çözümündeki tüm desimal değerleri körü körüne kabul etme konusunda çok dikkatli olmak gerektiğini söylemektedir. Yukarıdaki algoritma programlanıp çalıştırılırsa $t = 1$ deki çözüm $x_{200} = 6.42194$ olur. Programın örnek bir çıktısı şu şekildedir:

k	t	x
0	-1.00000	3.00000
1	-0.99000	3.01400
2	-0.98000	3.02803
3	-0.97000	3.04209
4	-0.96000	3.05617
5	-0.95000	3.07028
6	-0.94000	3.08443
7	-0.93000	3.09861
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
196	0.96000	6.36566
197	0.97000	6.37977
198	0.98000	6.39386
199	0.99000	6.40791
200	1.00000	6.42194

Bir sonraki bilgisayar çalıştırmasında diferensiyel denklem, bu x_{200} değeri *başlangıç* koşulu alınıp, $h = -0.01$ ile çalıştırıldığında; program bu kez $t = -0.99999$ da $x_{200} \approx 3.00000$ verir. Orjinal başlangıç değerine olan bu yakınlık, sayısal çözümün, yaklaşık olarak görünen 6 değerinin, yani görünen rakamların tümüne kadar duyarlı olduğunu düşünmemizi sağlar.

Tartıştığımız örnekte, sayısal çözümün her adımındaki yerel kesme hatasını tahmin etmek güç değildir. Bunun için (4) Taylor serisindeki hata teriminin

$$E_n = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} x^{(n+1)}(t+\theta h) \qquad (0<\theta<1)$$

olduğunu hatırlayalım. Bu, h nın toplamda içerilen son kuvvetinin h^n olması durumundaki hatadır. Örnekte, $n=4$ ve $h=0.01$ almıştık. Basit bir sonlu-fark ile $x^{(5)}(t+\theta h)$ e bir yaklaşım yapılırsa

$$E_4 \approx \frac{1}{5!} h^5 \left[\frac{x^{(4)}(t+h) - x^{(4)}(t)}{h} \right] = \frac{h^4}{120} \left[x^{(4)}(t+h) - x^{(4)}(t) \right] \qquad (5)$$

elde edilir. Taylor yönteminde $n=1$ durumuna **Euler yöntemi** denir. Yani

$$x(t+h) = x(t) + hf(t,x)$$

Bu formül açık olarak f nin herhangi türevini *içermeme* avantajına sahiptir. Bu avantaj, kabul edilebilir bir duyarlılık için h nın küçük değerlerini alma zorunluluğu nedeniyle dengelenir.