NÜMERİK ANALİZ

Bilimsel Hesaplama Matematiği

Nuri ÖZALP

FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

Polinom İnterpolasyonu

Newton Formu

Problem

$n+1$ tane (x_i, y_i) verisinden oluşan

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

tablosu verilmiş olsun ve

$$p(x_i) = y_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

olacak şekilde mümkün olan en küçük dereceden bir p polinomu arayalım. Bu tip bir polinoma tabloyu **interpole eder** *(birleştirir) veya tablonun bir* **interpolasyon polinomu** *denir denir.*

Teorem (Polinom İnterpolasyonu)

Eğer $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *farklı reel sayılar ise, bu durumda keyfi* $y_0, y_1, \ldots, y_n$ *sayıları için*

$$p_n(x_i) = y_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

olacak şekilde derecesi en fazla n *olan* **tek** *bir* p_n *polinomu vardır.*

İspat (**Teklik:**)

Bu tipten iki p_n *ve* q_n *polinomu olduğunu kabul edelim. Bu durumda* $p_n - q_n$ *polinomu,* $0 \leq i \leq n$ *için* $(p_n - q_n)(x_i) = 0$ *özelliğine sahip olacaktır.* $p_n - q_n$ *polinomunun derecesi en fazla* n *olabileceğinden dolayı, eğer* 0 *polinomu değilse, bu polinom en fazla* n *tane sıfıra sahiptir. Fakat,* x_i *ler farklı olduklarından, polinomu* $n+1$ *sıfıra sahip olur ki; bu durumda* $(p_n - q_n)(x) \equiv 0$ *olmalıdır. O halde,* $p_n \equiv q_n$ *dir.*

- $n = 0$ için, bir p_0 sabit fonksiyonu (derecesi ≤ 0 olan polinom) $p_0(x_0) = y_0$ olacak şekilde seçilebilir.

- $n = 0$ için, bir p_0 sabit fonksiyonu (derecesi ≤ 0 olan polinom) $p_0(x_0) = y_0$ olacak şekilde seçilebilir.
- $0 \leq i \leq k-1$ için $p_{k-1}(x_i) = y_i$ olacak şekilde, derecesi $\leq k-1$ olan bir p_{k-1} polinomu var olsun. p_k yı

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{1}$$

formunda inşa edelim:

- $n = 0$ için, bir p_0 sabit fonksiyonu (derecesi ≤ 0 olan polinom) $p_0(x_0) = y_0$ olacak şekilde seçilebilir.
- $0 \leq i \leq k-1$ için $p_{k-1}(x_i) = y_i$ olacak şekilde, derecesi $\leq k-1$ olan bir p_{k-1} polinomu var olsun. p_k yı

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \qquad (1)$$

formunda inşa edelim:

  - $p_k(x)$ en fazla k. derecedendir.

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i \qquad (0 \leq i \leq k-1)$$

olduğundan, p_{k-1} in interpole ettiği noktaları p_k da interpole eder.

- $n = 0$ için, bir p_0 sabit fonksiyonu (derecesi ≤ 0 olan polinom) $p_0(x_0) = y_0$ olacak şekilde seçilebilir.
- $0 \leq i \leq k-1$ için $p_{k-1}(x_i) = y_i$ olacak şekilde, derecesi $\leq k-1$ olan bir p_{k-1} polinomu var olsun. p_k yı

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{1}$$

formunda inşa edelim:

  - $p_k(x)$ en fazla k. derecedendir.

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i \qquad (0 \leq i \leq k-1)$$

  olduğundan, p_{k-1} in interpole ettiği noktaları p_k da interpole eder.
  - Şimdi, $p_k(x_k) = y_k$ koşulundan, bilinmeyen c katsayısını belirleyelim. Koşul uygulanırsa

$$p_{k-1}(x_k) + c(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}) = y_k \tag{2}$$

  elde edilir.

- $n = 0$ için, bir p_0 sabit fonksiyonu (derecesi ≤ 0 olan polinom) $p_0(x_0) = y_0$ olacak şekilde seçilebilir.
- $0 \leq i \leq k-1$ için $p_{k-1}(x_i) = y_i$ olacak şekilde, derecesi $\leq k-1$ olan bir p_{k-1} polinomu var olsun. p_k yı

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{1}$$

formunda inşa edelim:

  - $p_k(x)$ en fazla k. derecedendir.

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i \qquad (0 \leq i \leq k-1)$$

  olduğundan, p_{k-1} in interpole ettiği noktaları p_k da interpole eder.
  - Şimdi, $p_k(x_k) = y_k$ koşulundan, bilinmeyen c katsayısını belirleyelim. Koşul uygulanırsa

$$p_{k-1}(x_k) + c(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}) = y_k \tag{2}$$

  elde edilir.
  - c nin çarpanları 0 olmadıklarından, Denklem (2) den kesinlikle c çözülebilir. (Neden?)

Elde edilmesi:

p_k polinomu p_{k-1} e basitçe tek bir terim eklenerek elde edilir:

$$\begin{aligned} p_k(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots + c_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \end{aligned} \tag{3}$$

veya kapalı formda

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) \tag{4}$$

dir. Burada $m < 0$ için $\prod_{j=0}^{m}(x - x_j) = 1$ alışılmış kabulünü yapıyoruz. (4) polinomunun (**Newton formu**) ilk bir kaç durumu

$$\begin{aligned} p_0(x) &= c_0 \\ p_1(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) \\ p_2(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

$p_k(x)$ i hesaplamak için, $c_0, c_1, ..., c_k$ katsayılarının bilindikleri varsayılarak, **içiçe çarpım** veya **Horner algoritması** olarak adlandırılan etkili bir yöntem kullanılır. Bu yöntem

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} d_j = c_0 + c_1 d_0 + c_2 d_0 d_1 + \cdots + c_k d_0 d_1 \cdots d_{k-1} \qquad (5) \\ &= c_0 + d_0 \left\{ c_1 + \cdots + d_{k-3} \left[c_{k-2} + d_{k-2} \left(c_{k-1} + d_{k-1} (c_k) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

formundaki keyfi bir ifade için kolaylıkla açıklanabilir. u yu hesaplama algoritması şu şekilde üretilir:

$$\begin{aligned} u_k &\leftarrow c_k \\ u_{k-1} &\leftarrow u_k d_{k-1} + c_{k-1} \\ u_{k-2} &\leftarrow u_{k-1} d_{k-2} + c_{k-2} \\ &\vdots \\ u_0 &\leftarrow u_1 d_0 + c_0 \end{aligned}$$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

katsayıları

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})}$$

dan $c_0 = y_0$ dan başlanarak ardarda hesaplanabilirler fakat aynı sonucu elde eden daha etkili bir yordam mevcuttur. Bu alternatif yöntem, $c_0, c_1, ..., c_k$ katsayılarını hesaplamak için **bölünmüş farklar** kullanmaktadır. Bu yöntemi Kesim 2 de sunacağız.

Örnek

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

tablo değerleri

$$p_3(x) = 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954$$

polinomundan tanımlanmıştır. Eğer tablonun Newton interpolasyon polinomunu hesaplarsak, $c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 4$ olup,

$$p_3(x) = 1 + 2(x-5) + 3(x-5)(x+7) + 4(x-5)(x+7)(x+6)$$

bulunur.

Lagrange Formu

p nin (Lagrange formu)

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k\ell_k(x) \tag{6}$$

formunda ifade edilir. Burada, $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_n$ ler polinomlar olup, $x_0, x_1, ..., x_n$ nodlarına bağlıdırlar, fakat $y_0, y_1, ..., y_n$ **ordinatlarına** bağlı *değildirler*. i. konumdaki bir 1 hariç, tüm ordinatlar 0 olabileceğinden dolayı,

$$\delta_{ij} = p_n(x_j) = \sum_{k=1}^{n} y_k\ell_k(x_j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\ell_k(x_j) = \ell_i(x_j)$$

olduğunu görürüz. (**Kronecker deltasının**) $k = i$ için $\delta_{ki} = 1$ ve $k \neq i$ için $\delta_{ki} = 0$ ile tanımlandığını hatırlayalım.) Bu özelliğe sahip bir polinomlar kümesine kolaylıkla ulaşabiliriz.

ℓ_0 ı göz önüne alalım. Bu $x_1, x_2, ..., x_n$ de 0 değerini alan ve x_0 da 1 değerini alan, n. dereceden bir polinom olacaktır. Açıkça, ℓ_0,

$$\ell_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = c \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

formunda olmalıdır. c nin değeri $x = x_0$ alınarak elde edilir ki;

$$1 = c \prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)$$

ve buradan

$$c = \prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)^{-1}$$

dir.

Böylece

$$\ell_0(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}$$

buluruz. ℓ_i lerin hepsi, aynı nedenlemeyle

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

olarak elde edilir. $x_0, x_1, ..., x_n$ nodlarının kümesi için bu polinomlar **kardinal** (temel) **fonksiyonları** olarak bilinir. Elimizdeki bu kardinal polinomları ile Denklem (6) interpolasyon polinomunun **Lagrange formunu** verir.

Örnek

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

tablosunun kardinal fonksiyonları ve interpolasyon polinomunun Lagrange formu nedir?

Çözüm

Nodlar $5, -7, -6, 0$ *dır. Böylece, kardinal fonksiyonları*

Örnek

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

tablosunun kardinal fonksiyonları ve interpolasyon polinomunun Lagrange formu nedir?

Çözüm

Nodlar $5, -7, -6, 0$ *dır. Böylece, kardinal fonksiyonları*

$$\ell_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \tfrac{1}{660}x(x+6)(x+7)$$

Örnek

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

tablosunun kardinal fonksiyonları ve interpolasyon polinomunun Lagrange formu nedir?

Çözüm

Nodlar $5, -7, -6, 0$ *dır. Böylece, kardinal fonksiyonları*

$$\ell_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \tfrac{1}{660}x(x+6)(x+7)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = \tfrac{-1}{84}x(x-5)(x+6)$$

Örnek

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

tablosunun kardinal fonksiyonları ve interpolasyon polinomunun Lagrange formu nedir?

Çözüm

Nodlar $5, -7, -6, 0$ *dır. Böylece, kardinal fonksiyonları*

$$\ell_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \tfrac{1}{660}x(x+6)(x+7)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = \tfrac{-1}{84}x(x-5)(x+6)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \tfrac{1}{66}x(x-5)(x+7)$$

Örnek

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

tablosunun kardinal fonksiyonları ve interpolasyon polinomunun Lagrange formu nedir?

Çözüm

Nodlar $5, -7, -6, 0$ *dır. Böylece, kardinal fonksiyonları*

$$\ell_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \frac{1}{660}x(x+6)(x+7)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = \frac{-1}{84}x(x-5)(x+6)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}x(x-5)(x+7)$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = \frac{-1}{210}(x-5)(x+6)(x+7)$$

O halde, interpolasyon polinomu

Örnek

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

tablosunun kardinal fonksiyonları ve interpolasyon polinomunun Lagrange formu nedir?

Çözüm

Nodlar $5, -7, -6, 0$ *dır. Böylece, kardinal fonksiyonları*

$$\ell_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \tfrac{1}{660}x(x+6)(x+7)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = \tfrac{-1}{84}x(x-5)(x+6)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \tfrac{1}{66}x(x-5)(x+7)$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = \tfrac{-1}{210}(x-5)(x+6)(x+7)$$

O halde, interpolasyon polinomu

$$p_3(x) = \ell_0(x) - 23\ell_1(x) - 54\ell_2(x) - 954\ell_3(x)$$

Genel Form

- Polinom interpolasyonu için, hâlâ diğer algoritmalar çeşitli avantajlara ve dezavantajlara sahiptirler. $n+1$ (farklı) noktada önceden verilen değerlere sahip, derecesi $\leq n$ olan bir ve yalnız bir polinom olduğundan, bu algoritmalar aynı polinomu farklı formlarda üretirler. Örneğin, polinomu

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

şeklinde x in kuvvetleri cinsinden ifade edilmesini isteyebiliriz. $p(x_i) = y_i, \quad (0 \leq i \leq n)$ interpolasyon koşulları, $a_0, a_1, ..., a_n$ leri belirlemek için $n+1$ boyutlu bir lineer denklem sistemi verir:

- Bu sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

formuna sahiptir. Katsayı matrisine **Vandermonde matrisi** denir. Matris tekil değildir fakat sıklıkla **kötü** durumludur.

- A matrisinin **durum sayısı**

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$$

olup, burada $\|\cdot\|$ bir matris (örneğin $\|A\| = \max_{ij} |a_{ij}|$) normudur. Eğer $Ax = b$ nin çözümü sağ taraftaki b deki küçük değişikliklere karşı duyarsız oluyorsa; bu durumda b deki küçük değişimler, hesaplanan x çözümünde de sadece küçük değişimlere neden olur. Bu durumda, A **iyi durumludur** denir. Bu, $\kappa(A)$ durum sayısının sadece küçük bir büyüklükte olmasına karşılık gelir. Diğer yandan, eğer durum sayısı büyük ise, A **kötü durumludur** ve $Ax = b$ nin sayısal çözümü çok büyük bir şüphe altında kabul edilmek zorundadır.

Artılar: (Newton formu):

- Nümerik çalışma için, interpolasyon polinomunun Newton formunu kullanmak muhtemelen en iyisidir.

Artılar: (Newton formu):

- Nümerik çalışma için, interpolasyon polinomunun Newton formunu kullanmak muhtemelen en iyisidir.
- İnterpolasyon problemine daha fazla veri eklenirse, halihazırda hesaplanmış olan katsayılar değiştirilmek zorunda değil.

Artılar: (Newton formu):

- Nümerik çalışma için, interpolasyon polinomunun Newton formunu kullanmak muhtemelen en iyisidir.
- İnterpolasyon problemine daha fazla veri eklenirse, halihazırda hesaplanmış olan katsayılar değiştirilmek zorunda değil.
- **Artılar: (Lagrange formu):**

Artılar: (Newton formu):

- Nümerik çalışma için, interpolasyon polinomunun Newton formunu kullanmak muhtemelen en iyisidir.
- İnterpolasyon problemine daha fazla veri eklenirse, halihazırda hesaplanmış olan katsayılar değiştirilmek zorunda değil.
- **Artılar: (Lagrange formu):**
- Bir x_i nodlar kümesi için, birinin, örneğin deneysel verilerden elde ettiği, bu nodlara karşılık gelen bir çok farklı y_i değerlerine sahip olması durumu için kardinal fonksiyonları aynı kalır

Polinom İnterpolasyonunda Hata

Teorem (Polinom İnterpolasyonunun Hatası)

f, $C^{n+1}[a,b]$ de bir fonksiyon olsun ve p de f yi $[a,b]$ aralığındaki $n+1$ tane farklı $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktasında interpole eden, en fazla n. dereceden bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir $x \in [a,b]$ için

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{7}$$

olacak şekilde karşılık gelen bir $\xi_x \in (a,b)$ noktası vardır.

İspat

Eğer $x = x_i$ ise, iddia açık olarak doğrudur. $x \neq x_i$ (sabitlenmiş) varsayalım.

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \qquad \phi \equiv f - p - \lambda w$$

diyelim. Burada λ, $\phi(x) = 0$ yapan herhangi bir reel sayıdır. Böylece, $\lambda = \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}$ olur. Şimdi, $\phi \in C^{n+1}[a, b]$ $n+1$ tane $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktasında sıfır olur. Rolle teoreminden dolayı, (a, b) içinde ϕ' en az $n+1$ tane farklı sıfıra, ϕ'' en az n tane farklı sıfıra, $\phi^{(n+1)}$ en az bir tane ξ_x sıfırına sahiptir. O halde

$$\phi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - p^{(n+1)} - \lambda w^{(n+1)} = f^{(n+1)} - (n+1)!\lambda$$

dir. Buradan

$$0 = \phi^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - (n+1)!\lambda = f^{(n+1)}(\xi_x) - (n+1)!\frac{f(x)-p(x)}{w(x)}$$

elde ederiz, ki bu da Denklem (7) yi verir.

Örnek

Eğer $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna $[0, 1]$ aralığındaki on noktada 9. dereceden bir interpolasyon polinomu ile yaklaşılırsa, bu aralıktaki hata ne kadar büyük olabilirir?

Örnek

Eğer $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna $[0,1]$ aralığındaki on noktada 9. dereceden bir interpolasyon polinomu ile yaklaşılırsa, bu aralıktaki hata ne kadar büyük olabilirir?

Çözüm

Bu sorunun yanıtı için Teorem 2 deki Denklem (13) ü kullanalım. Açıkça $\left|f^{(10)}(\xi_x)\right| \leq 1$ *ve* $\prod_{i=1}^{9}|x - x_i| \leq 1$ *dir. Böylece, her* $x \in [0,1]$ *için,*

$$|\sin x - p(x)| \leq \frac{1}{10!} < 2.8 \times 10^{-7}$$

olur.

Teorem (Chebyshev Polinomları)

$[-1, 1]$ *aralığındaki* x *ler için, Chebyshev polinomları*

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \qquad (n \geq 0)$$

kapalı-form ifadesine sahiptir.

$$\begin{aligned}
|T_n(x)| &\leq 1 && (-1 \leq x \leq 1) \\
T_n\left(\cos \tfrac{j\pi}{n}\right) &= (-1)^n && (0 \leq j \leq n) \\
T_n\left(\cos \tfrac{2j-1}{2n}\pi\right) &= 0 && (1 \leq j \leq n)
\end{aligned}$$

Teorem (İnterpolasyon Hatası, Chebyshev Nodları)

Eğer x_i nodları T_{n+1} Chebyshev polinomunun kökleri ise, bu durumda Teorem 2 deki hata formülü, ($|x| \leq 1$ için)

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{|t| \leq 1} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

şeklini alır.