Ders 2

Kümeler

1

Küme

Tanım
küme:

- birbirinden ayırt edilebilen
- aralarında sıralama yapılmamış
- yinelenmeyen

elemanlar topluluğu

2

Küme Gösterimi

- *açık gösterilim*
  elemanlar süslü parantezler içinde listelenir: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- *kapalı gösterilim*
  bir yüklemi doğru kılan elemanlar: $\{x | x \in G, p(x)\}$
- $\emptyset$: boş küme
- S bir küme, a bir nesne ise:
  - $a \in S$: a nesnesi S kümesinin bir elemanıdır
  - $a \notin S$: a nesnesi S kümesinin bir elemanı değildir

Örnek

$\{3, 8, 2, 11, 5\}$

$11 \in \{3, 8, 2, 11, 5\}$

3

Kapalı Gösterim Örnekleri

Örnek

$\{x | x \in \mathbb{Z}^+, 20 < x^3 < 100\} \equiv \{3, 4\}$

$\{2x - 1 | x \in \mathbb{Z}^+, 20 < x^3 < 100\} \equiv \{5, 7\}$

Örnek

$A = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 5\}$

Örnek

$E = \{n | n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}\ n = 2k\}$

$A = \{x | x \in E, 1 \leq x \leq 5\}$

4

Küme İkilemi

- bir köyde bir berber kendini traş etmeyen herkesi traş ediyor kendisini traş edenleri traş etmiyor

  bu berber kendisini traş eder mi?

- *etmez*: kendisini traş etmeyen herkesi traş ediyor $\rightarrow$ eder
- *eder*: kendisini traş edenleri traş etmiyor $\rightarrow$ etmez

Küme İkilemi

- S bir kümeler kümesi
- kendisinin elemanı olmayan kümeler kümesi:
  $S = \{A | A \notin A\}$

  S kendisinin elemanı mıdır?

- *evet*: yüklemi sağlamaz $\rightarrow$ hayır
- *hayır*: yüklemi sağlar $\rightarrow$ evet

Sonlu Küme

Tanım
sayılabilen küme:
elemanları numaralandırılabilen küme

- ℝ kümesi sayılamaz

Tanım
sonlu küme:
sayılabilen ve eleman sayısı sonlu olan küme

- ℕ kümesi sayılabilir ama sonlu değildir
- eleman sayısı: kardinalite, gösterilim: $|S|$

Rasyonel Sayılar ve Doğal Sayılar

$\mathbb{Q}$

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	...
1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	...
1/3	2/3	4/3	5/3	7/3	8/3	10/3	...
1/4	3/4	5/4	7/4	9/4	11/4	13/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	6/5	7/5	8/5	...
1/6	5/6	7/6	11/6	13/6	17/6	19/6	...
1/7	...	...	...	...	...	...	

$\mathbb{N}$

1	2	4	7	11	16	22	...
3	5	8	12	17	23	...	
6	9	13	18	24	...		
10	14	19	25	...			
15	20	26	...				
21	27	...					
28	...						

Altküme

Tanım
$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$

- küme eşitliği:
  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- uygun altküme:
  $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$
- $\forall S \ \emptyset \subseteq S$

9

Altküme Değil

altküme değil

$$
\begin{aligned}
A \nsubseteq B &\Leftrightarrow \neg\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x \ \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x \ \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \ ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \ ((x \in A) \wedge (x \notin B))
\end{aligned}
$$

10

Altkümeler Kümesi

Tanım

altkümeler kümesi:

bir kümenin, boş küme ve kendisi dahil, bütün altkümelerinin oluşturduğu küme

- gösterilimi: $\mathcal{P}(S)$
- n elemanlı bir kümenin altkümeler kümesinin 2^n elemanı vardır

Altkümeler kümesi örneği

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \quad = \{ & \\
& \emptyset \\
& \{1\}, \{2\}, \{3\} \\
& \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \\
& \{1,2,3\} \\
\} &
\end{aligned}
$$

Küme İşlemleri

tümleme

$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

kesişim

$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

- $A \cap B = \emptyset$ ise A ile B ayrık kümeler

birleşim

$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$

13

Küme İşlemleri

fark

$A - B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$

- $A - B = A \cap \overline{B}$
- *bakışımlı fark*:
  $A \triangle B = \{x | (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$

14

Kartezyen Çarpım

Tanım

kartezyen çarpım:

$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

$A \times B \times C \cdots \times N = \{(a, b, \ldots, n) | a \in A, b \in B, \ldots, n \in N\}$

15

Kartezyen Çarpım Örneği

Örnek

$A = \{a_1.a_2, a_3, a_4\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$
\begin{aligned}
A \times B = \{ & \\
& (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \\
& (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \\
& (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), \\
& (a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_4, b_3) \\
\} &
\end{aligned}
$$

16

Eşdeğerlilikler

1. çifte tümleme:
   $\overline{\overline{A}} = A$
2. değişme:
   $A \cap B = B \cap A$
   $A \cup B = B \cup A$
3. birleşme:
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Eşdeğerlilikler

4. sabit kuvvetlilik:
   $A \cap A = A$
   $A \cup A = A$
5. terslik:
   $A \cap \overline{A} = \emptyset$
   $A \cup \overline{A} = U$
6. etkisizlik:
   $A \cap U = A$
   $A \cup \emptyset = A$
7. baskınlık:
   $A \cap \emptyset = \emptyset$
   $A \cup U = U$
8. dağılma:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
9. yutma:
   $A \cap (A \cup B) = A$
   $A \cup (A \cap B) = A$
10. De Morgan:
    $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
    $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

De Morgan Kuralı

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin (A \cap B)\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x \mid \neg((x \in A) \wedge (x \in B))\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B)\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

19

Eşdeğerlilik

Teorem

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

20

Eşdeğerlilik Örneği

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&= ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C})) \\
&= \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C})) \\
&= (A \cap B) \cap \overline{C} \\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (B - C)
\end{aligned}$$

İçleme-Dışlama İlkesi

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cup B \cup C| =$
  $|A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

Teorem

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\cdots + -1^{n-1} |A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

İçleme-Dışlama Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- asal sayıları bulmak için bir yöntem

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30			
2	3		5		7		9		11		13		15		17
	19		21		23		25		27		29				
2	3		5		7				11		13				17
	19				23		25				29				
2	3		5		7				11		13				17
	19				23						29				

İçleme-Dışlama Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- 1'den 100'e kadar asal sayıların sayısı
- 2, 3, 5 ve 7'ye bölünemeyen sayılar
  - A_2: 2'ye bölünen sayılar kümesi
  - A_3: 3'e bölünen sayılar kümesi
  - A_5: 5'e bölünen sayılar kümesi
  - A_7: 7'ye bölünen sayılar kümesi
- $|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7|$

İçleme-Dışlama Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- $|A_2| = \lfloor 100/2 \rfloor = 50$
- $|A_3| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$
- $|A_5| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$
- $|A_7| = \lfloor 100/7 \rfloor = 14$
- $|A_2 \cap A_3| = \lfloor 100/6 \rfloor = 16$
- $|A_2 \cap A_5| = \lfloor 100/10 \rfloor = 10$
- $|A_2 \cap A_7| = \lfloor 100/14 \rfloor = 7$
- $|A_3 \cap A_5| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$
- $|A_3 \cap A_7| = \lfloor 100/21 \rfloor = 4$
- $|A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/35 \rfloor = 2$

İçleme-Dışlama Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

- $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \lfloor 100/30 \rfloor = 3$
- $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \lfloor 100/42 \rfloor = 2$
- $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/70 \rfloor = 1$
- $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/105 \rfloor = 0$

- $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \lfloor 100/210 \rfloor = 0$

İçleme-Dışlama Örneği

Örnek (Eratosthenes Kalburu)

$$
\begin{aligned}
|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= (50 + 33 + 20 + 14) \\
&- (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) \\
&+ (3 + 2 + 1 + 0) \\
&- (0) \\
&= 78
\end{aligned}
$$

- asalların sayısı: $(100 - 78) + 4 - 1 = 25$

27