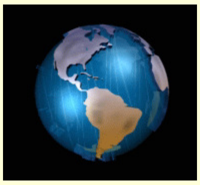
5. BÖLÜM



İKİ VE ÜÇ BOYUTLU UZAYDA VEKTÖRLER

GENEL

İlk olarak vektörler kısmında incelenen

- Vektörel çarpım
- İzdüşüm

gibi bazı konular determinant bilgileri kullanılarak yeniden ele alınacaktır.

Vektörel Çarpım

Tanım: Üç boyutlu uzaydaki her hangi iki vektör $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ ise bu iki vektör 2×3 boyutlu bir matris olarak tanımlanabilir:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\\mathbf{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$$

Vektörel çarpım determinant gösterimi ile:

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

Vektörel Çarpım: Birim Vektörler

Eğer **A** matrisi her hangi iki birim vektörden, örneğin **i** ve **j**, oluşmuş ise

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\\mathbf{j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Vektörel çarpım determinant gösterimi ile:

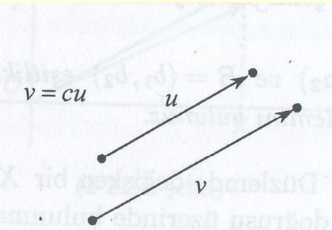
$$\begin{aligned}\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}&=\left(\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)\\&=(0,0,1)\\&=\mathbf{k}\end{aligned}$$

Paralel Vektörler

Tanım: **u** ve **v** *n*-boyutlu uzayda sıfırdan farklı iki vektör olsun. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

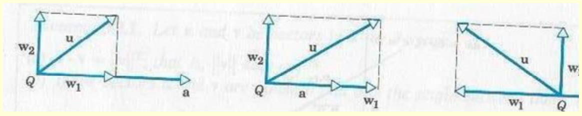
$$\mathbf{v} = c\mathbf{u}$$

ise **v** vektörü **u** vektörüne paraleldir.



ORTOGONAL İZDÜŞÜM

Sıfırdan farklı **u** ve **a** vektörlerinin her ikisinin de *Q* başlangıç noktasına sahip oldukları varsayılsın. Uygulamalarda ilgilenilen durumlardan biri de genellikle **u** vektörünü biri **a** vektörüne *paralel* diğeri **a** vektörüne *dik* iki bileşene ayırmaktır.



ORTOGONAL İZDÜŞÜM

u vektöründen **a** vektörüne dik bir doğru indirilir ve bu doğrunun **a** vektörünü kestiği noktayı *Q* noktası ile birleştiren vektör $\mathbf{w}_1$ ile belirtilirse bu vektör **a** vektörüne *paralel bileşeni* tanımlar.

a vektörüne *dik ikinci bileşen* ise,

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$

$\mathbf{w}_1$ vektörü **u** vektörünün **a** vektörü üzerine *ortogonal izdüşümü* olarak adlandırılır.

$$izd_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$$

$\mathbf{w}_2$ vektörü **u** vektörünün **a** vektörüne *ortogonal vektör bileşeni* olarak adlandırılır.

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - izd_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$$

ORTOGONAL İZDÜŞÜM

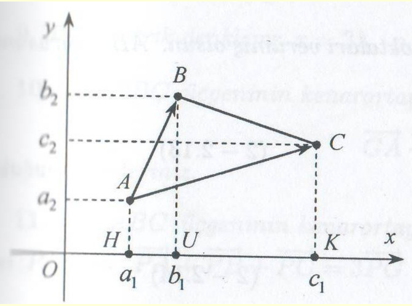
Teorem: **u** ve **a** sıfırdan farklı vektörler olmak üzere,

$$izd_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u.a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \qquad \text{(Ortogonal izdüşüm vektörü)}$$

$$\mathbf{u} - izd_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u.a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \quad \text{(Ortogonal vektör bileşeni)}$$

$$|izd_{\mathbf{a}}\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{u.a}|}{|\mathbf{a}|^2}|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{u.a}|}{|\mathbf{a}|}$$

Düzlemde Üçgenin Alanı



Düzlemde Üçgenin Alanı

Teorem: İki boyutlu uzayda (düzlemde) $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$ noktaları verilmiş olsun. ABC üçgeninin alanı:

$$A=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|$$

$$A=\frac{1}{2}\det\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

Burada $\vec{AB}=\left(b_1-a_1,b_2-a_2\right)$

$\vec{AC}=\left(c_1-a_1,c_2-a_2\right)$

Düzlemde Doğru Denklemi

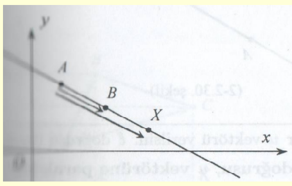
Tanım: İki boyutlu uzayda (düzlemde) $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ noktaları verilmiş olsun. Bu uzaydaki değişken bir nokta ise $X(x,y)$ ile tanımlansın. Eğer X noktası AB doğrusunun üzerinde ise AB doğrusunun (vektörel) denklemi, $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere:

$\vec{AX}=\lambda\vec{AB}$

$X-A=\lambda\left(B-A\right)$

$x=a_1+\lambda\left(b_1-a_1\right)$ ve

$y=a_2+\lambda\left(b_2-a_2\right)$



Düzlemde Doğru Denklemi

AB doğrusunun *parametrik denklemi*;

$$x=a_1+\lambda\left(b_1-a_1\right)$$

$$y=a_2+\lambda\left(b_2-a_2\right)$$

ve doğrunun *standart denklemi*:

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}=\lambda$$

Üç Boyutlu Uzayda Düzlemler

Düzlemde bir doğru, *doğrunun eğimi* ve *doğruya ait bir nokta* kullanılarak belirlenebilir.

Üç boyutlu uzayda ise bir düzlem, *düzlemin eğimi* ve *düzleme ait bir nokta* kullanılarak belirlenebilir.

Düzlemin eğimini belirlemenin yöntemlerinden biri; bu *düzleme dik* sıfırdan farklı *bir vektörün* bulunmasıdır.

Düzleme dik sıfırdan farklı vektöre *normal* vektör denir.

Üç Boyutlu Uzayda Düzlemler

Düzlem üzerindeki bir nokta $P_0(x_0, y_0, z_0)$

Düzleme dik normal vektör $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Düzlemi oluşturan tüm $P(x, y, z)$ noktalarının tanımladığı $P_0\vec{P}$ vektörü,

$$P_0\vec{P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

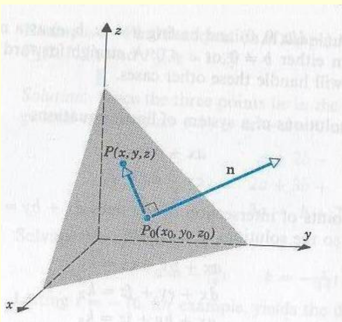
n vektörüne dik olmalıdır:

$$\mathbf{n}.P_0\vec{P} = 0$$

Düzlem denkleminin *nokta*-*normal* formu:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Üç Boyutlu Uzayda Düzlemler



Üç Boyutlu Uzayda Düzlemler

Teorem: Eğer *a*, *b*, *c* ve *d* sabitler ise ve *a*, *b* ve *c* sıfırdan farklı ise normal vektörü **n**=(*a*,*b*,*c*) olan bir *düzlemin denklemi*:

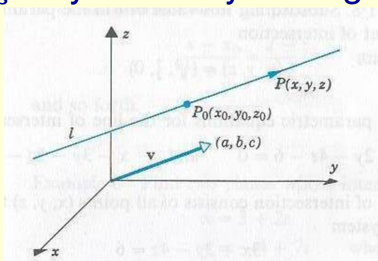
$$ax + by + cz + d = 0$$

Üç Boyutlu Uzayda Doğrular

Üç boyutlu uzayda $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *noktasından geçen* ve Sıfırdan farklı bir $\mathbf{v} = (a,b,c)$ *vektörüne paralel* olan bir l doğrusu olsun.
Bu l doğrusu, $\mathbf{v}$ vektörüne paralel tüm $P_0\vec{P}$ vektörlerinin tanımladığı $P(x, y, z)$ noktalarından oluşur:

$$P_0\vec{P} = \lambda \mathbf{v}$$
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

Üç Boyutlu Uzayda Doğrular



l doğrusu için *Parametrik denklemler*:

$$x = x_0 + \lambda a$$
$$y = y_0 + \lambda b$$
$$z = z_0 + \lambda c$$

Üç Boyutlu Uzayda Düzlemler

Teorem: Bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktası ile bir $ax + by + cz + d = 0$ düzlemi arasındaki D uzaklığı:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Not: Paralel V ve W gibi iki düzlem arasındaki uzaklık P_0 noktası ile V düzlemi arasındaki uzaklığa eşittir.

NOKTA ve DÜZLEM ARASINDAKİ UZAKLIK