ÖRNEKLER-İÇ ÇARPIM UZAYI

1. $\Re^2$ vektör uzayındaki iki vektör **u**=(1 0) ve **v**=(0 1) ise,

a. **u** vektörünün uzunluğunu bulunuz.

b. **u** ve **v** vektörleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

c. İç çarpım uzayında w_1=3, w_2=2 ise **u** için uzunluk ile **u** ve **v** arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm: **a.** $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$

b.

c. $|\mathbf{u}| = \sqrt{w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2} = \sqrt{3.1.1 + 2.0.0} = \sqrt{3}$

$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sqrt{3(1-0)^2 + 2(0-1)^2} = \sqrt{5}$

2. Teorem 7.1 i ispatlayınız.

Çözüm: Eğer **u=0** ise $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0$ olup eşitlik sağlanır. Eğer **u**≠0 ise $a = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle$, $b = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$, $c = \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$ ve t bir reel sayı olsun. Her hangi bir vektörün kendisi ile çarpımı negatif olamayacağı için,

$$0 \leq \langle (t\mathbf{u}+\mathbf{v}), (t\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle t + \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$
$$= at^2 + bt + c$$

Eşitsizlik karesel polinomun reel köklerinin olmadığını ya da katlı reel kökün bulunduğunu belirtmektedir. Bu nedenle diskriminant vektörlere göre yazıldığında,

$$4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \leq 0$$
$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$

İspat tamamlanır.

3. Teorem 7.2 yi ispatlayınız.

Çözüm: $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bir baz olduğu için *V* uzayındaki her hangi bir **u** vektörü baz kümedeki vektörlerin doğrusal kombimasyonu,

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

olarak yazılabilir. İspatın tamamlanabilmesi için, $k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle$ olduğu gösterilmelidir. *S* kümesindeki her $\mathbf{v}_i$ vektörü için,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle = \langle k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle$$

S kümesi ortanormal bir küme olduğunudan,

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1 \quad \text{ve} \quad \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i\rangle = 0 \quad i \neq j \text{ için}$$

sonuç olarak,

$$k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i\rangle$$

bulunur.

4. Teorem 7.3 ü ispatlayınız.

Çözüm: S kümesinin doğrusal bağımsız olabilmesi için,

$$k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = 0 \qquad (1)$$

$$k_1 = \cdots = k_n = 0$$

denkleminde olmalıdır. *S* kümesindeki her bir $\mathbf{v}_i$ vektörü için eşitlik (1) kullanılarak,

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

$$k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \qquad (2)$$

S kümesindeki vektörler ortogonal olduğundan $i \neq j$ için $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ olacaktır ve eşitlik (2)

$$k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

eşitliğine dönüşür. Teorem 7.3 e göre *S* kümesindeki vektörler sıfırdan farklı olduğundan $k_i=0$ olmalıdır. İspat tamamlanır.

5. Öklit iç çarpımı ile $\Re^3$ vektör uzayı ele alınsın.

a. $\mathbf{u}_1=(1\ 1\ 1)$, $\mathbf{u}_2=(0\ 1\ 1)$, $\mathbf{u}_3=(0\ 0\ 1)$ baz vektörlerini Gram-Schmidt yöntemi ile ortogonal baza dönüştürünüz.

b. Elde edilen ortogonal bazı ortanormal baza dönüştürünüz.

Çözüm: a. Adım 1. $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1=(1\ 1\ 1)$ alınız.

Adım 2. $$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - proj_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

$$= 0\ 1\ 1 \quad - 2\ 1\ 1\ 1$$

Adım 3. $$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - proj_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

Sonuç olarak $\Re^3$ vektör uzayı için ortogonal baz vektörler:
$\mathbf{v}_1=(1\ 1\ 1)$, $\mathbf{v}_2=\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\right)$, $\mathbf{v}_3=\left(0\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$

b. Ortanormal baz için ortogonal vektörlerin uzunlukları bulunur:

$|\mathbf{v}_1|=\sqrt{3}$, $|\mathbf{v}_2|=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $|\mathbf{v}_3|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ortanormal baz vektörler:

$\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$\frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$,

$\frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|}=\left(0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

6. Teorem 7.4 ü ispatlayınız.

Çözüm: W alt uzayındaki her **w** vektörü için

$\mathbf{u}-\mathbf{w}=(\mathbf{u}-proj_W\mathbf{u})+(proj_W\mathbf{u}-\mathbf{w})$

yazılabilir.

İkinci bileşen $proj_W\mathbf{u}-\mathbf{w}$, *W* alt uzayındaki iki vektörün farkıdır ve *W* alt uzayında yer alır. İlk bileşen $\mathbf{u}-proj_W\mathbf{u}$ ise W alt uzayına ortogonaldir. Bu nedenle eşitliğin sağındaki iki bileşen birbirine ortogonaldir (diktir).

Pisagor teoremi ile;

$|\mathbf{u}-\mathbf{w}|^2=|\mathbf{u}-proj_W\mathbf{u}|^2+|proj_W\mathbf{u}-\mathbf{w}|^2$

Eğer $proj_W\mathbf{u}\neq\mathbf{w}$ ise bu toplamdaki ikinci terim daima pozitif bir değer alacaktır ve

$$|\mathbf{u}-proj_W\mathbf{u}|^2<|\mathbf{u}-\mathbf{w}|^2$$

ya da her iki tarafın kare kökü alınarak,

$$|\mathbf{u}-proj_W\mathbf{u}|<|\mathbf{u}-\mathbf{w}|$$

İspat tamamlanır.