ÖRNEKLER-VEKTÖR UZAYLARI

1. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında yer alan **w**=(9 2 7) vektörünün, **u**=(1 2 -1), **v**=(6 4 2) vektörlerinin doğrusal bir kombinasyonu olduğunu ve **z**=(4 -1 8) vektörünün ise bu vektörlerin doğrusal bir kombinasyonu olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\mathbf{w}=k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v}$ olmalıdır.

$$(9\ 2\ 7)= k_1(1\ 2\ -1)+k_2(6\ 4\ 2)$$
$$=(k_1+6k_2,\ 2k_1+4k_2,\ -k_1+2k_2)$$

ya da

$$k_1+6k_2=9$$
$$2k_1+4k_2=2$$
$$-k_1+2k_2=7$$

Sistem çözüldüğünde $k_1=-3$ ve $k_2=2$ sonuç olarak,

$$\mathbf{w}=-3\mathbf{u}+2\mathbf{v}.$$

Benzer olarak, $\mathbf{z}=k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v}$ olmalıdır.

$$(4\ -1\ 8)= k_1(1\ 2\ -1)+k_2(6\ 4\ 2)$$
$$=(k_1+6k_2,\ 2k_1+4k_2,\ -k_1+2k_2)$$

ya da

$$k_1+6k_2=4$$
$$2k_1+4k_2=-1$$
$$-k_1+2k_2=8$$

Sistem tutarsızdır. k_1 ve k_2 bulunamaz.

2. Verilen üç vektörün $\mathbf{v}_1=(1\ 1\ 2)$, $\mathbf{v}_2=(1\ 0\ 1)$, $\mathbf{v}_3=(2\ 1\ 3)$ $\mathbb{R}^3$ vektör uzayını türetip türetemeyeceğini araştırınız.

Çözüm: $\mathbb{R}^3$ vektör uzayındaki her hangi bir $\mathbf{b}=(b_1\ b_2\ b_3)$ vektörünün bu üç vektörün doğrusal kombinasyonu olarak,

$$\mathbf{b}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3$$

ifade edilip edilemeyeceği araştırılmalıdır.

$$(b_1\ b_2\ b_3)=k_1(1\ 1\ 2)+k_2(1\ 0\ 1)+k_3(2\ 1\ 3)$$
$$=(k_1+k_2+2k_3,\ k_1+k_3,\ 2k_1+k_2+3k_3)$$

ya da

$$\begin{aligned} k_1+k_2+2k_3&=b_1\\ k_1+k_3&=b_2\\ 2k_1+k_2+3k_3&=b_3 \end{aligned}$$

sistemin, $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, tutarlı olabilmesi için katsayı matrisinin,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tersi alınabilmelidir. Diğer bir ifade ile $|\mathbf{A}|\neq 0$ olmalıdır. Fakat verilen sistem için $|\mathbf{A}|=0$ olduğundan, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ vektör uzayını türetemez.

3. Verilen üç vektörün $\mathbf{v}_1$=(1 -2 3), $\mathbf{v}_2$=(5 6 -1), $\mathbf{v}_3$=(3 2 1) doğrusal bağımlı olup olmadıklarını araştırınız.

Çözüm: Doğrusal bağımsızlık için,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

vektör denklemi sadece $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ için sağlanmalıdır.

c_1(1 -2 3)+c_2(5 6 -1)+c_3(3 2 1)=(0 0 0)

ya da

$$c_1+5c_2+3c_3=0$$

$$-2c_1+6c_2+2c_3=0$$

$$3c_1-c_2+c_3=0$$

denklem sisteminin çözümü,

$c_1=(-1/2)t \quad c_2=(-1/2)t \quad c_3=t$

olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdır.

İkinci bir yöntem katsayı matrisinin determinatını hesaplamaktır.

$|\mathbf{A}| \neq 0$ ise vektörler doğrusal bağımsız,

$|\mathbf{A}| = 0$ ise vektörler doğrusal bağımlıdır.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Teorem 6.1 için ispat yapınız.

Çözüm: *S* kümesi *V* vektör uzayını türettiği için *V* uzayındaki her vektör *S* kümesindeki vektörlerin doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilir:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

İkinci bir doğrusal kombinasyon,

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

olsun. İkinci denklem ilk denklemden çıkartılarak,

$$\mathbf{v} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n$$

S kümesi baz olduğundan içerdiği vektörler doğrusal bağımsız olmalıdır:

$$c_1 - k_1 = 0, \ldots, c_n - k_n = 0$$

Sonuç olarak **v** vektörü için her iki ifade eşit olmak zorundadır.

5. Üç vektörden $\mathbf{v}_1$=(1 2 1), $\mathbf{v}_2$=(2 9 0), $\mathbf{v}_3$=(3 3 4) oluşan bir $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir baz tanımladığını gösteriniz.

Çözüm: *S* kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir baz oluşturduğunu göstermek için ilk olarak, her hangi bir **b**=(b_1 b_2 b_3) vektörünün bu üç vektörün doğrusal kombinasyonu olarak,

$$\mathbf{b}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3$$

ifade edilip edilemeyeceği araştırılmalıdır

$$(b_1\ b_2\ b_3)=k_1(1\ 2\ 1)+k_2(2\ 9\ 0)+k_3(3\ 3\ 4)$$

$$=(k_1+2k_2+3k_3,\ 2k_1+9k_2+3k_3,\ k_1+4k_3)$$

ya da doğrusal denklem sistemi

$$\begin{aligned} k_1+2k_2+3k_3&=b_1\\ 2k_1+9k_2+3k_3&=b_2\\ k_1\qquad\ \ +4k_3&=b_3 \end{aligned}$$

b vektörünün tüm seçimleri için bir çözüme sahip olmalıdır.

İkinci olarak S kümesindeki vektörler doğrusal bağımsız olmalıdır.

Diğer bir ifade ile

$$k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$$

homojen denklem sisteminin tek çözümü sıfır çözüm,

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ olmalıdır:

$$\begin{aligned} k_1+2k_2+3k_3&=0\\ 2k_1+9k_2+3k_3&=0\\ k_1\qquad\ \ +4k_3&=0 \end{aligned}$$

Her iki sistemde aynı katsayı matrisine,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 9 & 3\\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

sahiptir. Bu katsayı matrisinin tersi alınabiliyor (determinantı sıfırdan farklı) ise S kümesi $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir baz tanımlar, (türetir ve bağımsızdır). Sonuç olarak $|\mathbf{A}| \neq 0$ bulunduğundan S kümesi $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir baz tanımlar.

6. Bir önceki örnekte $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için bir baz tanımladığı gösterilmişti.

a. $\mathbf{v}$=(5 -1 9) vektörünün S kümesine göre koordinat vektörünü bulunuz.

b. S bazına göre koordinat vektörü $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$ olan $\mathbb{R}^3$ vektör uzayındaki vektörü bulunuz.

Çözüm: a. $k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3=\mathbf{v}$ eşitliğini sağlayan skalerler bulunmalıdır.

$$(5\ -1\ 9)=k_1(1\ 2\ 1)+k_2(2\ 9\ 0)+k_3(3\ 3\ 4)$$

$$k_1+2k_2+3k_3=5$$

$$2k_1+9k_2+3k_3=-1$$

$$k_1 \qquad +4k_3=9$$

sonuç olarak, $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=2$ ve

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

b. Koordinat vektörü tanımı kullanılarak,

$$\mathbf{v}= (-1)\mathbf{v}_1+(3)\mathbf{v}_2+(2)\mathbf{v}_3= (-1)(1\ 2\ 1)+ (3)(2\ 9\ 0)+ (2)(3\ 3\ 4)$$

v=(11 31 7)

bulunur.

7. Aşağıdaki homojen doğrusal denklem sisteminin

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

a. Çözümünü bulunuz.

b. Çözüm uzayının boyutunu bulunuz.

Çözüm: a. Sistemin satır Echelon matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ve sistem olarak,

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Çözüm yapısı,

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \quad -x_5 \\ x_3 &= -x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Parametrik değişken olarak $x_2=s$ ve $x_5=t$ alınarak, çözüm kümesi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Sıfır çözüm $s=t=0$ için elde edilir.

b. Çözüm vektörü yapay (parametrik) değişkenlere göre ayrıştırılarak,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Çözüm uzayını türeten vektörler:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Olup birbirinden bağımsızdır. Bu nedenle çözüm uzayının bazını tanımlarlar. Çözüm uzayı iki boyutludur.

8. Aşağıdaki vektörlerin türettiği uzayın bazını bulunuz.

$\mathbf{v}_1 = (1,-2,0,0,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-5,-3,-2,6)$, $\mathbf{v}_3 = (0,5,15,10,0)$, $\mathbf{v}_4 = (2,6,18,8,6)$.

Çözüm: Bu vektörlerin türettiği uzay aşağıdaki matrisin satır uzayıdır:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin satır echelon matrisi,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sıfırdan farklı satır vektörleri:

$$\mathbf{w}_1 = (1,-2,0,0,3),\ \mathbf{w}_2 = (0,1,3,2,0),\ \mathbf{w}_3 = (0,0,1,1,0)$$

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ vektörlerinin türettiği uzay için baz oluştururlar. Bu aynı zamanda satır uzayıdır.

Not: Bulunan baz vektörlerin tümü orijinal matristeki sıra vektörleri ile aynı değildir.

9. A matrisinin sütun uzayının bazını bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Çözüm: Matrisin satır echelon yapısı,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin içerdiği birim vektörler,

$$\mathbf{c}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_4' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

R matrisinin sütun uzayı için bir baz oluşturur. Teoreme göre **A** matrisinin karşılık gelen vektörleri de

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

A matrisinin sütun uzayı için bir baz oluşturur.

10. **A** matrisinin sütun uzayının bazını bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Çözüm: Matrisin satır echelon yapısı,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R matrisinin ilk üç sütunu pivot 1 değerini vermektedir. Bu üç sütun **R** matrisinin sütun uzayı için bir baz oluşturur. **A** matrisinin sütun uzayının bazı ise karşılık gelen sütun vektörleridir:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$$

11. **A** matrisinin satır uzayının bazını bulunuz.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 3\\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6\\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0\\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6\end{bmatrix}$$

Çözüm: **A** matrisinin transpoz matrisi,

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ -2 & -5 & 5 & 6\\ 0 & -3 & 15 & 18\\ 0 & -2 & 10 & 8\\ 3 & 6 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

İndirgenmiş satır echelon matris,

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -5 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^T$ matrisi için sütun uzayının bazı:

$$\mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 0\\ 3\end{bmatrix},\ \mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}2\\ -5\\ -3\\ -2\\ 6\end{bmatrix},\ \mathbf{c}_4=\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 18\\ 8\\ 6\end{bmatrix}$$

A matrisinin satır uzayı için baz vektörler:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

12. Aşağıdaki vektörler için;

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 & 6 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a. Türetilen uzayın bazını bulunuz.

b. Baz olmayan vektörleri, baz vektörlerin doğrusal kombinasyonu olarak bulunuz.

Çözüm: **a.** Yukarıdaki vektörleri, sütun vektörleri olarak kullanan matris;

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

indirgenmiş satır echelon matrisi,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 & \mathbf{w}_5 \end{array} \\ \mathbf{R} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sütun uzayı için baz vektörler $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4\}$ olup orijinal matris için, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$.

b. **R** matrisi kullanılarak, baz olmayan $\mathbf{w}_3$ ve $\mathbf{w}_5$ vektörleri, baz vektörlerin doğrusal kombinasyonu olarak,

$\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ $\qquad$ $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

$\mathbf{w}_5 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4$ $\qquad$ $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$

yazılır.

Not: $\mathbf{w}_3$ vektörü kendinden önceki baz vektörlere göre, ($\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$).

$\mathbf{w}_5$ vektörü de kendinden önceki baz vektörlere göre, ($\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_4$).

13. **A** matrisinin rankını ve boş uzayını bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Çözüm: **A** matrisinin satır echelon matrisi,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sıfırdan farklı iki satır olduğu için satır uzayı (aynı zamanda sütun uzayı) iki boyutludur ve $r(\mathbf{A})=2$.

Matrisin boş uzayını bulmak için **Ax=0** homojen doğrusal denklem sisteminin çözüm uzayının boyutu bulunmalıdır.

İndirgenmiş (echelon) matris kullanılarak denklem sistemi,

$$x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0$$

Asal değişkenlere (x_1,x_2) göre;

$$x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6$$

$$x_2 = 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6$$

Sistemin genel çözümü;

$$x_1 = 4r + 28s + 37t - 13u$$

$$x_2 = 2r + 12s + 16t - 5u$$

$$x_3 = r$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

$$x_6 = u$$

Çözüm uzayı için baz vektörler:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dört adet olduğu için $n(\mathbf{A})=4$.

14. **Ax=b** doğrusal denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ise **b** vektörünün **A** matrisinin sütun uzayında olduğunu gösteriniz ve **b** vektörünü **A** matrisinin sütun vektörlerinin doğrusal kombinasyonu olarak ifade ediniz.

Çözüm: Sistemin çözüm kümesi,

$x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=3$

sistem tutarlı olduğu için **b** vektörü **A** matrisinin sütun uzayındadır.

$2\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2+3\mathbf{c}_3=\mathbf{b}$

15. Teorem 6.2' yi ispatlayınız.

Çözüm: $\mathbf{x}_0$ vektörü $\mathbf{Ax=b}$ sisteminin belirli bir çözümü $\mathbf{x}$ vektörü ise aynı sistemin her hangi bir çözümü olsun.

$$\mathbf{Ax}_0=\mathbf{b} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Ax=b}$$

İki denklem birbirinden çıkarılarak,

$$\mathbf{Ax}-\mathbf{Ax}_0=\mathbf{0} \text{ ya da } \mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$$

Bu durumda $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ vektörü $\mathbf{Ax=0}$ homojen denklem sisteminin bir çözümüdür. Bu sistemin çözüm uzayının bazı $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ vektörleri ise $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ vektörü baz vektörlerin doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılabilir:

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}_0=+c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k$$

İspat tamamlanır.

16. Aşağıdaki denklem sisteminin özel çözümünü ve genel çözümlerini bulunuz.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\
2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\
& & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\
2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6
\end{array}$$

Çözüm: Denklem sisteminin çözüm kümesi,

x_1=-3r-4s-2t, x_2=r, x_3=-2s, x_4=s, x_5=t, x_6=1/3

vektör yapısında çözüm kümesi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r-4s-2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Özel çözüm:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Ax=0 için genel çözüm:

$$\mathbf{x} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ax=b ve **Ax=0** sistemlerinin genel çözümleri aynı sayıda yapay değişkene sahiptir.