Diferansiyel Denklemler II

Çalışma Soruları –1 **10.03.2014**

A. *Aşağıda verilen denklemlerin; "mertebe düşürme metodu kullanarak, hangi sınıflandırmaya ait olduğunu belirleyiniz! " yanlarında koşul var ise, istenen koşulu sağlayan çözümünü", "koşul yok ise, tüm çözümlerini bulunuz.*

1. $y'' = xy'^3$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$	**5.** $y'' = e^{2y}$
2. $y''\cos x = y'$	**6.** $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$
3. $y'' = y$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$	**7.** $y'' - 2xy' = 2y$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$
4. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$	**8.** $x^3y'y'' - x^2yy'' - x^2y'^2 + 2xyy' = x^2 + y^2$

B. $x^3y'' + y'^3 = 0$ *denklemini mertebe düşürme metodu kullanarak, hangi sınıflandırmaya ait olduğunu belirleyiniz! denklemin çözümünü veren içinde yalnızca bir tane integral işleminin olduğu integral denklemine kadar indirgeyiniz.*

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..

Çözümler...

(son güncelleme : 10.03.2015)

İki veya daha yüksek mertebeden Dif. Denk. için: Mertebe düşürme yöntemi

Sınıflandırmaları

S-A. $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$: En genel formda n.mertebeden Adi Dif.Denk.

S-A1.

$F\left(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ özelliğine sahip : Aranan fonks ve türevlerine göre HOMOJEN

$\Downarrow$

$y = e^{\int z dx}$ $\left(z = z(x)\right)$ dönüşümü yapılır.

S-A2.

$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y', ..., t^{k-n} y^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ özelliğine sahip : Genelleştirilmiş HOMOJEN

$\Downarrow$

$x = e^t$ (yani, $t = \ell n x$), $y = z e^{kt}$ dönüşümü yapılır.
$\left(z = z(t)\right.$:yeni aranan fonks., t : yeni bağımsız değişken$\left.\right)$

S-A3. $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = \dfrac{d}{dx}\phi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ şeklinde yazılabilen ϕ mevcut

S-B.

$F\left(x, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ Aranan fonksiyonu içermeyen

$y' = \dfrac{dy}{dx} = z$, $y'' = \dfrac{dz}{dx} = z'$,…,
$y^{(n)} = z^{(n-1)}$ dönüşümü yapılır $\left(z = z(x)\right)$.

S-B1. $y^{(n)} = f(x)$: ard-arda n kez integralini alarak çözüm elde edilir.

S-B2. $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$: $y^{(n-1)} = z$ dönüşümü yapılır $\left(z = z(x)\right)$.

S-B3. $y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right)$: önce $y^{(n-2)} = z$ dönüşümü yapılır $\left(z = z(x)\right)$.

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{d^2}{dx^2} y^{(n-2)} = \frac{d^2 z}{dx^2} = z'' \text{ olur}$$

$\Rightarrow$ $z'' = f(z)$ denklemi elde edilir.

$\Rightarrow$ $d(z') = f(z)dx$, her taraf $2z'$ ile çarpılır

$$\Rightarrow \underbrace{2z'd(z')}_{=d\left((z')^2\right)} = 2 \underbrace{z'}_{=\frac{dz}{dx}} f(z)dx$$

$$\underset{\text{integral işlemi}}{\Rightarrow} \quad z'^2 = 2\int f(z)dz + c_1 \Rightarrow z' = \mp\sqrt{2\int f(z)dz + c_1} \quad \text{(Değiş.Ayr.)}$$

$$\Rightarrow \mp\int \frac{1}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = x + c_2$$ şeklinde devam edilerek çözüm aranır.

S-C.

$F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$

Bağımsız değişkeni içermeyen

$$\left.\right\} \quad y' = \frac{dy}{dx} = p \text{ , dönüşümü yapılır.}$$

$$y'' = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p} = p\underbrace{\frac{dp}{dy}}_{=p'} = pp' \text{ ,...}$$

ÇözümA1. <u>S-B den çözebiliriz:</u> $y' = \dfrac{dy}{dx} = z$, $y'' = \dfrac{dz}{dx} = z'$

$\Rightarrow$ $z' = xz^3$ (z ile x arasında denk.) (değiş.ayr.)

$$\frac{1}{z^3}dz = xdx \Rightarrow -\frac{1}{2z^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2z^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2} \Rightarrow z^2 = -\frac{1}{x^2 + c_1}$$

$$\Rightarrow z = \mp\sqrt{-\frac{1}{x^2 + c_1}} \quad \text{... (1) elde edilir.}$$

Başlangıç koşullarından önce c_1 i bulup sonra çözüme devam edelim.

$$\left.\begin{array}{c} y(0) = 0 \text{ , } y'(0) = -1 \\ \text{yani } x = 0 \text{ için } y = 0 \text{ , } y' = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = \mp\sqrt{-\frac{1}{0 + c_1}}$$

eşitliğin sağ tarafının " – " *olması durumunda* $c_1 = -1$ bulunur. O halde (1) denkleminde c_1 yerine yazılarak denklemin sağ tarafı "–" olan parçasından çözüme devam edilir.

$z = y' = -\sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}} \Rightarrow y = -\arcsin(x) + c_2$. Başlangıç koşullarından c_2 yi bulalım.

$0 = c_2 - \arcsin 0 \Rightarrow c_2 = 0$ bulunur.

O halde istenilen çözüm : $y = -\arcsin x$

ÇözümA2. S-B den çözebiliriz: $y' = \dfrac{dy}{dx} = z$, $y'' = \dfrac{dz}{dx} = z'$

$\Rightarrow z' \cos x = z$ (z ile x arasında denk.)(değiş.ayr.)

$(z \neq 0)$ $\dfrac{1}{z} dz = \dfrac{1}{\cos x} dx \Rightarrow \ell n |z| = \ell n \left| \dfrac{1}{\cos x} + \tan x \right| + \ell n |c_1| \Rightarrow$

$z = y' = c_1 (\dfrac{1}{\cos x} + \tan x)$

$\Rightarrow dy = c_1 (\dfrac{1 + \sin x}{\cos x})\, dx$

$$\int \frac{1+\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{(\cos x)(1-\sin x)} dx = \int \frac{\cos^2 x}{(\cos x)(1-\sin x)} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx$$

$$= -\ell n |1 - \sin x| + k_1$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{c_2 = c_1 k_1 \text{ diyelim}}$ $y = c_2 - c_1 \ell n |1 - \sin x|$ [Genel Çözüm]

ÇözümA3. S-C den S-A1 den veya S-B3 den çözebiliriz: $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$,

$y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy} = pp'$

$\Rightarrow pp' = y$ (p ile y arasında denk.)(değiş.ayr.)

$pdp = ydy \Rightarrow \dfrac{p^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{c_1}{2} \Rightarrow p = \mp\sqrt{c_1 + y^2}$ ... (2) elde edilir.

Başlangıç koşullarından önce c_1 i bulup sonra çözüme devam edelim.

$$\left.\begin{array}{c} y(0)=1\ ,\ y'(0)=1 \\ \text{yani } x=0 \text{ için } y=1\ ,\ y'=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1=\mp\sqrt{c_1+1}$$

eşitliğin sağ tarafının " + " *olması durumunda* $c_1=0$ bulunur. O halde (2) denkleminde c_1 yerine yazılarak denklemin sağ tarafı "+" olan parçasından çözüme devam edilir.

$$\Rightarrow \quad p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{0+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy=dx \quad \Rightarrow \quad \ell ny=x+\ell nc_2 \quad \Rightarrow \quad y=c_2e^x$$

Başlangıç koşullarından c_2 yi bulalım.

$1=c_2e^0 \;\Rightarrow\; c_2=1$ bulunur.

O halde istenilen çözüm : $\quad y=e^x$