

Ad-Soyad:

Numara:

İmza:

SORU 1. (20+10=30p) $(\cos x)y''' - xy'' + e^x y' + y = f(x) \dots(1)$ denklemi verilsin.

(a) (1) de: $f(x) = \sqrt{x - \pi}$ için söz konusu olan denklemin “ $y(x_0) = 1, y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 2$ ” başlangıç koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemi (yani Cauchy problemi) göz önüne alınsın. $x_0 = \frac{5\pi}{4}, x_0 = \pi$ noktaları için ayrı ayrı çözümün varlığı ve tekliği hakkında ne söylenebilir? V.T. Teoremlerinden yararlanarak açıklayınız.

(b) (1) de: $f(x) = 0$ için söz konusu olan denklemin: y_1, y_2, y_3, y_4 çözümleri göz önüne alınsın. Bu dört çözümün aralarında lineer bağımsız olup olmadıkları hakkında ne söylenebilir?

Açıklamalar: “(a) için: denk. in lineer olup olmadığı gözlenmeli; Yöntem olarak ; yalnızca V.T. (yani, Varlık-Teklilik) Teoremleri kullanılmalı”, “(b) için: verilen çözümler: ilgili denklemin I üzerinde tanımlı keyfi çözümleri şeklindedir ; Vereceğiniz cevap için: herhangi bir işlem yapılmayacak tek satırlık gerekçe ile açıklanacaktır ; Not:Cevap herhangi bir ön koşula bağlı değildir. lineer bağımlı veya lineer bağımsız şeklinde net bir cevabı vardır”.

SORU 2. (20p) $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{y}y'^2 = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

SORU 3. (50p) Aşağıdaki A-B-C şıklarından yalnızca **iki tanesini seçerek** yapınız!

(A) $y = x^2 - \sin(2x)$ çözümünü sağlayan sabit katsayılı, lineer-homojen denklemi bulunuz.

(B) $\frac{y^4}{4} + x^2 y^3 y'' = x^2$ denklemini: mertebe düşürme yöntemini kullanarak, çözümü veren içinde yalnızca bir tane integral işleminin olduğu integral denkleme kadar indirgeyiniz.

(C) $(1 + x \tan x)y'' - xy' + y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ verilsin. Bu durumda denklemin genel çözümünü bulunuz.

Açıklamalar: “(A) için: Karakteristik Denklemden yararlanılacak ; Oluşturulacak denklemin lineer bağımsız çözümlerinden bahsedilecek ; İlgili çözümü sağlayacak şekilde belirlenebilecek en küçük mertebeli denklem bulunacak ; Farklı yollardan yapılacak bütün çözümler ve en küçük mertebeden daha yüksek mertebeli tespit edilişler değerlendirme dışıdır.”, “(B) için: denklemin: hangi sınıflandırmaya ait olduğunu belirlenecek ; Yapılacak dönüşüme karar verilecek ; Dönüşüm sonrası türevleri hesap edilecek.” ; “(C) için: Abel formülünden (Ostrogradsky-Lioville formülünün bir özel hali olan) yararlanılacak ; Farklı bir yöntem olarak özel çözümün kullanıldığı uygun dönüşüm ile mertebe düşürme yöntemi de kullanılabilir ; Bunların haricindeki yöntemler değerlendirme dışıdır.”

Not: Çıkışta Soru Kağıtları da Teslim Edilecek

UYARI: Soru 3 de seçimli sorular dikkate alınmadan istenenden fazla soruya uğraşırsanız (*cevap kağıdınızda, soruyla ilgili üzeri karalanmadan bulunan her yazım uğraş kabul edilecektir*), ilgili sorunun puanlaması: her bir şık 50/3 puan şeklinde olacaktır. Çözümlerinizi yüksek puan almayı hedefliyorsanız: cevaplarınızın gerekçeleri ile birlikte doğru olması gerekliliğini unutmayınız (özellikle Soru 1 için).

İ.Ü.Fen Fakültesi Matematik Bölümü 07.04.2015
Diferansiyel Denklemler II / Arasınav Soruları

Yrd.Doç.Dr.Serkan İLTER / İ.Ü. Matematik
Süre: **80'** BAŞARILAR..

Ad-Soyad:

Numara:

İmza:

SORU 1. (5+20+5=30p) $y_1=1$, $y_2=\sinh x$, $y_3=e^{-x}$, $y_4=\cosh x$ veriliyor.

(a) y_2 , y_4 : lineer bağımsız mı? Araştırınız.

(b) y_1 , y_2 , y_3 ü TÇS olarak kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

(c) (b) de belirlediğiniz denklem için: $y=c_1y_2+c_2y_3+c_3y_4$ çözümler ailesine: “denklemin genel çözümüdür” diyebilir miyiz? Açıklayınız.

Açıklamalar: TÇS ile: Temel Çözümler Sistemi kastedilmektedir. y_2 ve y_4 çözümleri: birer hiperbolik fonksiyondur. Bu fonksiyonların türevleri ile ilgili hata yapıldığı taktirde, ilgili bütün yanıtlarınız değerlendirme dışıdır. “(a) için: Wronsky determinantından yararlanılarak cevaplanacak, farklı yöntemler ile yapılacak bütün gözlemler değerlendirme dışıdır”, “(b) için: Wronsky determinantından yararlanılacak, **not:** $\cosh x + \sinh x = e^x$ eşitliğinden yararlanarak denklemi en sade haliyle tespit ediniz”, “(c) için: Vereceğiniz cevap: tek satırlık gerekçe ile açıklanacaktır.”

SORU 2. (20p) $(1-y')y''' + y''^2 = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

SORU 3. (50p) Aşağıdaki A-B-C şıklarından yalnızca **iki tanesini seçerek** yapınız!

(A) $y''' + y'' + y' + y = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerini belirleyiniz. Belirlediğiniz bu çözümlerle birlikte $y = 1$ fonksiyonunu da çözüm kabul eden (en küçük mertebeli) sabit katsayılı, lineer-homojen denklemi bulunuz.

(B) $y''' = y'e^{-y}$ denklemini: mertebe düşürme yöntemini kullanarak, çözümü veren içinde yalnızca bir tane integral işleminin olduğu integral denkleme kadar indirgeyiniz

(C) $x(x+1)y'' + xy' = y' + y$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \frac{1}{x+1}$ verilsin. Bu durumda denklemin genel çözümünü bulunuz.

Açıklamalar: “(A) için: denklem tespitinde: Wronsky determinantı ile ilgili formül kullanılmayacak; Karakteristik Denklemlerden yararlanılacak”, “(B) için: yapacağınız dönüşümlerde: dönüşüm sonrası türevleri mutlaka hesap ediniz –ezbere kullanma hakkınız yok-“, “(C) için: Abel formülünden (Ostrogradsky-Liouville formülünün bir özel hali olan) yararlanılacak, farklı bir yöntem olarak özel çözümün kullanıldığı uygun dönüşüm ile mertebe düşürme yöntemi de kullanılabilir; bunların haricinde kullanılacak yöntemler değerlendirme dışıdır.”

UYARI: Soru 3 de seçimli sorular dikkate alınmadan istenenden fazla soruya uğraşırsanız (cevap kağıdınızda, soruyla ilgili üzeri karalanmadan bulunan her yazım uğraş kabul edilecektir), ilgili sorunun puanlaması: her bir şık 50/3 puan şeklinde olacaktır. Çözümlerinizden yüksek puan almayı hedefliyorsanız: cevaplarınızın gerekçeleri ile birlikte doğru olması gerekliliğini unutmayınız. **Not: Çıkışta Soru Kağıtları da Teslim Edilecek**