Diferansiyel Denklemler I

Çalışma Soruları –3 19.12.2014

A. *Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulunuz.*

1. $x\,dy-(y+y^2)dx=0$	**7.** $xy'+y=\ell n(y')$
2. $2y'+y=\dfrac{e^x}{y}$, $y(0)=1$	**8.** $x^3y'-y^2-x^2y=0$
3. $x+2xyy'=\dfrac{1}{\ell n(x+y^2)}$	**9.** $xy'^2+yy'=xy'+y$
4. $y'-e^{x+y}+e^x=0$	**10.** $x-\dfrac{y}{y'}=y'^2$
5. $yy'-x^2y'^2=0$	**11.** $(x-xy)\,dy-(y+y^2)dx=0$
6. $(x^2-y)y'+x=0$	**12.** $y=xy'^2+1$

Not: Çözüm metodu olarak: "Tam dif.denk". ve "integrasyon çarpanı belirleyerek Tam dif. hale getirme" sınıflandırma ve metotları kullanılmayacak!

B. $y'=1+\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}$ denkleminin $y_1=x^k$ şeklinde bir özel çözümünü belirleyerek genel çözümünü bulunuz.

C. *Aşağıdaki denklemlerin C-diskriminant eğrilerini belirleyiniz, integral eğrilerinin zarfı var mı? varsa bulunuz, sonuç olarak tekil çözüm hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.*

1. A10 daki denklem	**2.** $y-xy'=e^{y'}$ (önce genel çözüm bulunacak)

D. $y'=\sqrt{xy}$ denkleminin aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin varlık ve tekliğini araştırınız

Not: "yöntem olarak: yalnızca V-T. Teoremleri kullanılacak"; "Teoremlerin sonuç vermediği durumlar, bu durumda ne söylenebileceği ile birlikte açıklanmalı"; "Genel çözümler bulunmayacak"

1. $y(1)=1$, **2.** $y(0)=1$, **3.** $y(-1)=-\dfrac{1}{2}$

Çözümler...

(son güncelleme : 19.12.2014)

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir.. *kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..*

Bazı soruların tam çözümleri yapılacak, bazılarının ise yol göstermelerle birlikte genel çözümler sorunun başında verilecektir. $y' = \frac{dy}{dx} = p$ gösterimini kullanacağız!

A1. $x\,dy - (y + y^2)\,dx = 0$: $y = \frac{cx}{1 - cx}$

I. yol : Değişkenlerine Ayrılabilir Denklem : $\int \frac{1}{y + y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \quad (y \neq 0, -1)$

II.yol : Bernoulli Denklemi: Denklemin her iki tarafı $x\,dx$ e bölünürse,

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^2$$

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

$$\Rightarrow \; p(x) = -\frac{1}{x}, \; q(x) = \frac{1}{x}$$

III.yol : Guruplandırma:

$$\underbrace{x\,dy - y\,dx}_{= x^2 d(\frac{y}{x})} = y^2 dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = dx$$

A2. (Bernoulli Denklemi)

$$2y' + y = \frac{e^x}{y}$$

$$\Rightarrow \; y' + \frac{y}{2} = \frac{e^x}{2y} \quad \text{(1)}$$

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \;\Rightarrow\; p(x) = \frac{1}{2}, \; q(x) = \frac{e^x}{2}$$

(1) denkleminin her iki tarafını y ile çarpalım, daha sonra aşağıdaki dönüşümü yapalım:

$$\Rightarrow \; yy' + \frac{1}{2}y^2 = \frac{e^x}{2}$$

$$y^2 = z \;,\; z = z(x)$$
$$2yy' = z'$$

Çalışma Soruları –3

$$\Rightarrow \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}z = \frac{e^x}{2}$$

$$\underset{\text{her iki tarafı 2 ile çarpıyoruz}}{\Rightarrow} \quad z' + z = e^x \quad \text{(lineer denklem)}$$

$$\Rightarrow \quad y' + \overline{p}(x)y = \overline{q}(x) \Rightarrow \overline{p}(x) = 1, \ \overline{q}(x) = e^x$$

Şimdi lineer denklemi, $z = uv$ dönüşümü ile çözelim:

$$\left.\begin{array}{c} z = uv\,,\ u = u(x)\,,\ v = v(x) \\ z' + z = e^x \\ z' = u'v + uv' \end{array}\right\} \Rightarrow u'v + uv' + uv = v(\underbrace{u' + u}_{=0}) + uv' = e^x$$

$$\Rightarrow u' + u = 0$$

$$\Rightarrow u = e^{-\int \overline{p}(x)\,dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

(dikkat, integral sabiti 0 seçiliyor)

$$\Rightarrow uv' = e^x \quad \Rightarrow v' = e^x e^x = e^{2x} \quad \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$ (v nin tespitinde: c integral sabitini eklemeyi UNUTMAYINIZ!)

$$\Rightarrow \quad z = uv \text{ den } \ z = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + c\right).$$

$$\underset{z = y^2 \text{ idi}}{\Rightarrow} \quad y^2 = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$$ [Genel Çözüm]

Şimdi denklemin verilen Başlangıç-Koşulundan sağlayan çözümünü bulalım.

$$\left.\begin{array}{c} y(0) = 1 \\ \text{yani } x = 0 \text{ için } y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{genel çözümden: } 1^2 = \frac{1}{2}e^0 + ce^{-0} \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

O halde istenilen çözüm : $y^2 = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

Çalışma Soruları –3

A3. $x+2xyy'=\dfrac{1}{\ell n(x+y^2)}$: $(x+y^2)\left(-1+\ell n(x+y^2)\right)=c+\ell n|x|$

$$x(\underbrace{1+2yy'}_{=u'})=\frac{1}{\ell n(\underbrace{x+y^2}_{=u})}$$

$$\Downarrow$$

$$xu'=\frac{1}{\ell nu}$$

$$x+y^2=u$$

$\Downarrow$ (x-e göre türev)

$$1+2yy'=u'$$

A4. $y'-e^{x+y}+e^x=0$: $\ell n\left|\dfrac{1-e^{-y}}{1-e}\right|=1-e^x$

Değişkenlerine Ayrılabilir Denklem :

$$y'-e^xe^y+e^x=0 \Rightarrow y'=e^x(e^y-1)$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{e^y-1}dy=\int e^x\,dx \quad (y\neq 0)$$

A5. (Birinci Mertebeden Türeve göre Çözülemeyen (Kapalı formda) Denklem / Çarpanlara Ayırma M.) $yy'-x^2y'^2=0$

$$yp-x^2p^2=0\Rightarrow p(y-px^2)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} p=0 \Rightarrow y'=0 & \textbf{(1)} \\ y-px^2=0 \Rightarrow y-y'x^2=0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Şimdi (1) ve (2) denklemlerini ayrı ayrı çözelim:

$$(1):\ y'=0 \underset{\textbf{(1)}\text{ in G.Ç.}}{\Rightarrow} y=c_1$$

$$(2):\ y-y'x^2=0 \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x^2}dx \quad (y\neq 0) \underset{\textbf{(2)}\text{ nin G.Ç.}}{\Rightarrow} y=c_2e^{-1/x}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(1)\text{ ve }(2)\text{ nin G.Ç. den}} \quad (y-c_1)(y-c_2e^{-1/x})=0 \quad [\text{Çözüm}]$$

A6. $(x^2-y)y'+x=0$: $2x^2+1=2y+ce^{-2y}$

Bernoulli Denklem (x in y-e göre):

$$\frac{dx}{dy}+x=-\frac{y}{x}$$

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)x^n$$

$$\Rightarrow \; p(y)=1,\; q(y)=-y$$

A7. (Lagrange Denklemi) $\quad xy'+y=\ell n(y')$

$$xp+y=\ell np \;\Rightarrow\; y=-xp+\ell np \quad (1)$$

$$y=x\varphi(p)+\psi(p) \qquad (\textit{Lagrange D.})$$

$$\Rightarrow\; \varphi(p)=-p\,,\; \psi(p)=\ell np$$

Şimdi (1) de $p=p(x)$ olarak düşünüp, denklemin her iki tarafının x-e göre türevini alalım:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p}=-p-x\frac{dp}{dx}+\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} \;\Rightarrow\; (-x+\frac{1}{p})\frac{dp}{dx}=2p$$

Şimdi son denklemin her iki tarafını p ye böleceğiz ve düzenlediğimizde lineer bir denklem edeceğiz! [$p=0$ durumunu incelemek gerekir ise: denklemin bu durumda tanımsız olacağı açıktır, dolayısıyla bu durumdan bir çözüm elde edilemez!]

$$\underset{p\neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{dx}{dp}+\frac{1}{2p}x=\frac{1}{2p^2}$$

(*x in p ye göre lineer denk.*)

$$\frac{dx}{dy}+r(p)x=q(p)$$

Lineer denklemin G.Ç.:

$$x = -\frac{1}{p} + \frac{c}{\sqrt{p}}$$

İnceleyip ara işlemleri yapınız!
Kontrol için: $x = uv$ *dönüşümünden*
$u = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $v = -\frac{1}{\sqrt{p}} + c$ *bulmalısınız!*

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{p} + \dfrac{c}{\sqrt{p}} & \textbf{(2)} \\ y = -xp + \ell np & \textbf{(1)} \end{cases}$$

Son olarak (2) deki x i, (1) de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{p} + \dfrac{c}{\sqrt{p}} \\ y = 1 - c\sqrt{p} + \ell np \end{cases}$$

Parametrik Çözüm elde edilir.

A8. $x^3 y' - y^2 - x^2 y = 0 \ : \ x^2 - y = cxy$

Bernoulli Denklem:

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^3} y^2$$

$$y' + p(x) y = q(x) y^n$$

$$\Rightarrow \ p(x) = -\frac{1}{x}, \ q(x) = \frac{1}{x^3}$$

A9. $xy'^2 + yy' = xy' + y \ : \ (y - x - c_1)(xy - c_2) = 0$

Birinci Mertebeden Türeve göre Çözülemeyen (Kapalı formda) Denklem /

Çarpanlara Ayırma M. $\Rightarrow \ (y' - 1)(y' + \frac{y}{x}) = 0$

A10. ($x=\varphi(y,p)$ Formundaki Denklem) $x-\dfrac{y}{y'}=y'^2$

$$x=p^2+\frac{y}{p} \qquad (1)$$

Şimdi (1) de $p=p(y)$ olarak düşünüp, denklemin her iki tarafının y-ye göre türevini alalım:

$$\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{=1/p}=2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad (2p-\frac{y}{p^2})\frac{dp}{dy}=0 \qquad (2)$$

Şimdi (2) nin çözümü ile ilgileneceğiz:

$$I.Durum: \ (2p-\frac{y}{p^2})=0$$

$$\Rightarrow \frac{2p^3-y}{p^2}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2p^3-y=0 & (3) \\ x=p^2+\dfrac{y}{p} & (1) \end{cases}$$

(3) den p çekilir, (1) de yerine yazılıp düzenlenirse; $y=2\left(\dfrac{x}{3}\right)^{3/2}$ elde edilir. Dikkat edilirse bu denklemin bir çözümüdür.

$$II.Durum: \ \frac{dp}{dy}=0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \begin{cases} p=c & (4) \\ x=p^2+\dfrac{y}{p} & (1) \end{cases}$$

Dikkat edilirse, yukarıdaki bağıntılarda p yi yok elde etmek mümkün: (4) deki p, (1) de yerine yazılırsa;

$$\Rightarrow \quad x=c^2+\frac{y}{c} \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

A11. (Darboux Denklemi)

$(x-xy)dy-(y+y^2)dx=0 \;\Rightarrow$

$-y^2dx-xydy+\left(xdy-ydx\right)=0$

$M(x,y)dx+N(x,y)dy+P(x,y)\left(xdy-ydx\right)=0$

$M(tx,ty)=-t^2y^2=t^2M\,,\; N(tx,ty)=-t^2xy=t^2N$

$\Rightarrow M\,,\quad N:\;$ 2.mertebeden, $\quad P$:0.mertebeden

homojen fonksiyonlar (*Darboux D.*)

$y=xz$ dönüşümü, $xdy-ydx=x^2d\left(\dfrac{y}{x}\right)=x^2dz \Rightarrow dy=zdx+xdz$ denklemde yazalım:

$\Rightarrow\; -(xz)^2\,dx-x\left(xz\right)\left(zdx+xdz\;\right)+x^2dz=0$

$\Rightarrow\; -2x^2z^2dx-x^2zxdz=-x^2dz$, şimdi her iki tarafı $\dfrac{1}{-2x^2z^2dz}$ ile çarpalım ($z\neq 0$)

$\Rightarrow\; \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{1}{z}x=-\dfrac{1}{2z^2}$ (*Lineer D.*) elde edilir.

Bu denklem çözülür ise $x=\dfrac{1}{z}\left(-\dfrac{1}{2}\ell n\left|z\right|+c\right)$ bulunur, $z=\dfrac{y}{x}$ idi

$$\Rightarrow\qquad y=-\frac{1}{2}\ell n\left|\frac{y}{x}\right|+c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

($z=0$ dan çözüm gelir mi? inceleyiniz.)

A12. $y=xy'^2+1\;:\; y=1+x\left(1-c\sqrt{x}\right)^2$

I. yol : Birinci Mertebeden Türeve göre Çözülemeyen Denklem /

$y=\varphi(x,p)$, özel olarak Lagrange Denklemi $y=x\varphi(p)+\psi(p)$

II. yol : $y=xy'^2+1 \;\Rightarrow\; y'=\pm\dfrac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}}$

Değişkenlerine Ayrılabilir Denklem

B. (Riccati denklemi) Öncelikle, $y'=1+\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}$ denkleminin özel çözümünde (yani

$y_1=x^k$ da) sözü geçen k yı belirleyelim: y_1 denklemi sağlar

$$\Rightarrow \quad y_1' = 1 + \frac{y_1}{x} - \frac{y_1^{\,2}}{x^2} \quad \text{den} \quad k\,x^{k-1} = \underbrace{1}_{=x^0} + \frac{x^k}{x} - \frac{x^{2k}}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k\,x^{k-1} &= x^0 + x^{k-1} - x^{2k-2} \\ &= \left(x^{-k+1} + 1 - x^{k-1}\right)x^{k-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow k = x^{-k+1} + 1 - x^{k-1}$ den $k = 1$ olduğu görülür!

I.Aşama: Şimdi denklemi, $y = z + y_1$ dönüşümü ile bir Bernoulli denk.i haline getirelim:

$$\left.\begin{aligned} y &= z + x\,,\; z = z(x) \\ y^2 &= z^2 + 2xz + x^2 \\ y' &= z' + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' + \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} = 1$$

$$\Rightarrow z' + 1 + \frac{z^2 + 2xz + x^2}{x^2} - \frac{z + x}{x} =$$

$$= z' + \frac{1}{x^2}z^2 + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)z + 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}z^2 \quad \text{(Bernoulli denklemi)}$$

II.Aşama: Şimdi Bernoulli denk.i, lineer denk. haline getirip çözelim:

Bernoulli denk.nin her iki tarafını z^2 ile bölelim, daha sonra aşağıdaki dönüşümü yapalım:

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{x}z^{-1} = -\frac{1}{x^2} \qquad \begin{aligned} z^{-1} &= u \;\;,\; u = u(x) \\ -z^{-2}z' &= u' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -u' + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^2} \quad \underset{\text{her iki tarafı -1 ile çarpıyoruz}}{\Rightarrow} \quad u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2} \quad \text{(lineer denklem)}$$

$$\Rightarrow \quad y' + \overline{p}(x)y = \overline{q}(x) \;\Rightarrow\; \overline{p}(x) = -\frac{1}{x},\; \overline{q}(x) = \frac{1}{x^2}$$

Şimdi lineer denklemi, *integrasyon çarpanı bulma metodu* ile çözelim :

$$v = e^{\int \overline{p}(x)\,dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ell n x} = \frac{1}{x}$$ bulunur.

Şimdi lineer denklemin her iki tarafını $v = \dfrac{1}{x}$ ile çarpalım:

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u}_{=(vu)'=\left(\frac{1}{x}u\right)' \text{ oldugu görülür!}} \qquad = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}u\right)' = \frac{1}{x^3}$$

Şimdi son denklemin her iki tarafının integralini alalım:

$$\frac{1}{x}u = \int \frac{1}{x^3}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}u = -\frac{1}{2x^2} + 2c$$

$$\Rightarrow \quad u = x\left(-\frac{1}{2x^2} + 2c\right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{1}{z}=\frac{1}{y-x} \text{ idi}} \quad \frac{1}{y-x} = x\left(-\frac{1}{2x^2} + 2c\right)$$, düzenlenirse::

$$\Rightarrow \qquad y = x + \frac{2x}{-1+cx^2} \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

C1. $x - \dfrac{y}{y'} = y'^2$ denkleminin genel çözümü: $x = c^2 + \dfrac{y}{c}$ idi.

Çalışma Soruları –3

$$\phi = x - c^2 - \frac{y}{c} = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\phi_c = -2c + \frac{y}{c^2} = 0$$

(2)

$\Rightarrow$ (2) den c çekilir $2c = \dfrac{y}{c^2} \Rightarrow c^3 = \dfrac{y}{2}$

$\Rightarrow$ **(1)** düzenlenip, bu değer kullanılırsa,

$$\Rightarrow \phi = x = c^2 + \frac{y}{c} = \frac{c^3 + y}{c} \Rightarrow cx = \frac{y}{2} + y = \frac{3y}{2}$$

$$\Rightarrow \text{küpünü alalım, } \underbrace{c^3}_{=y/2} x^3 = \frac{27y^3}{8}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^3 - 27y^2 = 0 \quad (\text{C-dis. eğri})$$

Şimdi C-dis. Eğrisi: integral eğrilerin zarfı olabilir mi araştıralım. Derste verilen yeter koşulun sağlanıp sağlanmadığına bakacağız:

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \phi_{xc} & \phi_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{1}{c} \\ 0 & \dfrac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2} \neq 0 \ , \ \phi_{cc} = -2 - \frac{2y}{c^3} \neq 0 \ \ (y \neq c^3 \text{ için})$$

$\Rightarrow$ Teoremin koşullar sağlanacaktır

$\Rightarrow$ $4x^3 - 27y^2 = 0$: intg.eğrilerinin zarfıdır $\Rightarrow$ Tekil çözümdür.

(Ek gözlem: zarf varsa: c-dis. tarafından içerileceğinden, int.eğrilerin başka zarfı yoktur diyebiliriz.)

C2. (Clairaut denklemi) $\quad y = xp + e^p \quad$ **(1)** $\Rightarrow$ $y = x\,p + \psi(p)$.

Şimdi (1) de $p = p(x)$ olarak düşünüp, denklemin her iki tarafının x-e göre türevini alalım:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=p} = p + x\frac{dp}{dx} + e^p\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad (x + e^p)\frac{dp}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$ $\left(x + e^p = 0\right) \vee \left(\dfrac{dp}{dx} = 0\right)$ $\Rightarrow$ bu soruda amaç genel çözümü belirlemek olduğu için

$\dfrac{dp}{dx} = 0$ bölümünden devam edelim.

$$\left.\begin{array}{l} p=c \\ y=xp+e^p \quad \textbf{(1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Genel çözüm:} \quad y=cx+e^c$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi=y-cx-e^c=0 \quad \textbf{(2)} \\ \phi_c=-x-e^c=0 \quad \textbf{(3)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{(3) den } c \text{ çekilir } -x=e^c \Rightarrow c=\ell n(-x) \\ \Rightarrow \text{(2) yazılırsa, } \; y-x-x\ell n(-x)=0 \; \text{(C-dis. eğri)} \end{array}$$

Şimdi C-dis. Eğrisi: integral eğrilerin zarfı olabilir mi araştıralım. Derste verilen yeter koşulun sağlanıp sağlanmadığına bakacağız:

$$\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \phi_{xc} & \phi_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;,\; \phi_{cc}=-e^c \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Teoremin koşullar sağlanacaktır}$$

$\Rightarrow \; y-x-x\ell n(-x)=0$: intg.eğrilerinin zarfıdır $\Rightarrow$ Tekil çözümdür.

D. $y'=f(x,y)$,

$$\left.\begin{array}{l} f=\sqrt{xy} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{2\sqrt{xy}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Bu fonksiyonlar } G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x>0,y>0)\vee(x<0,y<0)\right\} \text{de Süreklidir.}$$

ve

$$\underbrace{0<\varepsilon<1 \text{ için } (1,1) \text{ in civarı } G \text{ nin içerisinde kalır yani } U_\varepsilon(1,1)\subseteq G}$$

$\Downarrow$ Varlık-Teklik Teo.(Sonuç Teorem) den, $D=U_\varepsilon(1,1)$

Denklemin; $y(1)=1$ koşulunu sağlayan $x_0=1$ in bir civarında $\left(\left\{x\in\mathbb{R}:|x-1|<h\right\},\ h \text{ yeterince küçük}\right)$ çözümü var ve tektir.

$(0,1)$ noktası için: süreklilik bozulacağından; derste Sonuç Teorem olarak verilen Varlık-Teklik Teoreminin koşulları sağlanmayacaktır. Dolayısıyla bu Teo. uygulanamaz ve çözümün varlığı-tekliği hakkında bir şey söyleyemeyiz.

[Ek gözlem: Şimdi özel olarak yalnızca Varlık Teo (Peano) bakarsak ($(0,1)$ de: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ tanımsız ancak f tanımlı, bu nedenle çözümün varlığını inceleme gereği duyduk) : f fonksiyonu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x\geq 0, y>0)\vee(x\leq 0, y<0)\}$ da süreklidir. Dikkat edilirse, $(0,1)$ bu kümenin elemanıdır ancak, bu küme $(0,1)$ in bir civarını içermez. (gözlemlemek gerekir ise: $x=0$ ın $\mathbb{R}$ deki her civarında negatif değerler de bulunur $\Rightarrow$ "$x_0<0$ için kümenin tanımı gereği $(x_0,1)$ noktasını içermez") . O halde **Varlık-Teo**.nin koşulu sağlanmaz dolayısıyla sadece çözüm varlığı hakkında bir şey söyleyemiyoruz.]

$(-1,-\frac{1}{2})$ noktası için: $(1,1)$ için yapılanlara *benzer şekilde* (ancak bu sefer, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ alınacak), denklemin; $y(-1)=-1$ koşulunu sağlayan $x_0=-1$ in bir civarında $\left(\{x\in\mathbb{R} : |x+1|<h\},\ h \text{ yeterince küçük}\right)$ çözümü var ve tektir.