Diferansiyel Denklemler I

Çalışma Soruları –2 29.10.2014

A. *Aşağıda istenilenleri elde ediniz!*

1. $(xe^{y}+x)\,dy+(e^{y}+ky)\,dx=0$ denkleminin *tam diferansiyel denklem* olabilmesi için uygun k sayısını belirleyiniz. Bu k sayısı için tam diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

2. α nın hangi değeri için $\mu=\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}$: $xdy-(x^2+y^2+y)dx=0$ denkleminin (tam diferansiyel hale getiren) bir integrasyon çarpanı olur? belirleyiniz, bu çarpanı kullanarak denklemin çözümünü bulunuz.

B. *Aşağıda verilen denklemlerin; "hangi tip denklem olduklarını (nedenleri ile belirterek) belirleyiniz! "tüm çözümlerini (genel çözüm ve varsa tekil çözümlerini) çözümün geçerli olduğu değişkenlerin tanım aralıklarını da vererek" bulunuz.*

1. $(xy^2+\frac{1}{x})dx+(x^2y-\ell ny)dy=0$

2. $y'+y\cot x=\sin 2x$

3. $dy+(y-\sin x)\cos x\,dx=0$

4. $(x\cos y-\sin^2 y)dy-\sin y\,dx=0$

5. $x+y\ell ny=\frac{y}{y'}$

6. $(y-5x)dx+(x-5y)dy=0$

7. $\frac{y'}{\cos^2 y}-\frac{1}{x}\tan y=1$

8. $y'=-\frac{y}{x+\cos y}$

9. $(y-x+\frac{1}{x})dx+(x+y)dy=0$

10. $(\frac{x\ell n(xy)}{x+y}-xy)\,dy+(\frac{y\ell n(xy)}{x+y}-xy)\,dx=0$

S.İlter, http://aves.istanbul.edu.tr/ilters

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..

Çözümler…

(son güncelleme : 29.10.2014)

…………………………

Önbilgi .1 *(Bazı Diferansiyeller)*

Tablo

	$du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \ , \ u = u(x, y)$
1	$d(xy) = y\,dx + x\,dy$
2	$d(x^2 \pm y^2) = 2(x\,dx \pm y\,dy)$
3	$d(\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$
4	$d(\arctan\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

…………………………

....

***Önbilgi .2** (İntegrasyon Çarpan Araştırması)*

Tablo

$M\,dx + N\,dy = 0$ *Denk. için* μ *İntegrasyon Çarpanı Araştırması*

	Koşullar	integrasyon çarpanı	Açıklamalar
1	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$	$\mu = \mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}$	$\varphi(x)$ (yalnızca x-e bağlı) bir fonksiyon
2	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \varphi(y)$	$\mu = \mu(y) = e^{\int \varphi(y)\,dy}$	$\varphi(y)$ (yalnızca y-ye bağlı) bir fonksiyon
3	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial w}{\partial x} - M\dfrac{\partial w}{\partial y}} = \varphi(w)$	$\mu = \mu(w) = e^{\int \varphi(w)\,dw}$	$w = w(x,y)$ (hem x-e hem y-ye bağlı), $\varphi(w)$ (yalnızca w-ya bağlı) bir fonksiyon

Not.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{durum: yalnızca } x\text{-e bağlı;} \\ 2.\text{durum: yalnızca } y\text{-ye bağlı;} \\ 3.\text{durum: hem } x\text{-e hem } y\text{-ye bağlı} \end{array}\right\}:$$

integrasyon çarpanı araştırmalarında kullanılacaktır!

....

A1. $(xe^y+x)dy+(e^y+ky)dx=0$ için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M&=e^y+ky \\ N&=xe^y+x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=e^y+k \;,\; \frac{\partial N}{\partial x}=e^y+1$$

Denklemin Tam Dif.Denk. olabilmesi için $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ şartı sağlanmalıdır:

$\Rightarrow\; e^y+k=e^y+1 \;\Rightarrow\; k=1$ bulunur.

Şimdi $(xe^y+x)dy+(e^y+y)dx=0$

Tam Dif. Denk. in çözümünü bulalım:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\begin{aligned} u&=\int M\,dx+f(y) \\ &=\int (e^y+y)dx+f(y) \\ &=xe^y+xy+f(y) \quad \ldots\text{(A1-i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u&=\int N\,dy+g(x) \\ &=\int (xe^y+x)dy+g(x) \\ &=xe^y+xy+g(x) \quad \ldots\text{(A1-ii)} \end{aligned}$$

(A1-i) ve (A2-ii) den: $g(x)=0$, $f(y)=0$ bulunur. $\Rightarrow$ $u=xe^y+xy$ olur. Genel Çözüm $u=c$ idi.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Rightarrow \quad xe^y+xy=c & [\textbf{Genel Çözüm}] \\ I:\; -\infty<x<\infty & \end{array}}$$

A2. α yı belirlemek için iki yol izleyebiliriz:

I.yol: $\mu=\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}$ yani $\mu=\mu(x^2+y^2)$ formunda bir integrasyon çarpanı araştırması ile.

II.yol: Denklemin her iki tarafını $\mu=\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}$ ile çarpıp $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ eşitliğinden.

I.yoldan yapalım! **(**İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem**)**

$xdy-(x^2+y^2+y)dx=0$ için $\bar{M}\,dx+\bar{N}\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}&=-x^2-y^2-y\\ \bar{N}&=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial\bar{M}}{\partial y}=-2y-1\neq 1=\frac{\partial\bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

$$w=x^2+y^2\;\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=2x\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial y}=2y\end{cases}$$

Hem x-e hem y-ye bağlı integrasyon çarpanı, genel formda $w=w(x,y)$ için aşağıdaki şekilde araştırılıyor idi:

$$\frac{\dfrac{\partial\bar{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial\bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}\dfrac{\partial w}{\partial x}-\bar{M}\dfrac{\partial w}{\partial y}}=\frac{-2y-1-1}{x(2x)+(x^2+y^2+y)(2y)}=\frac{-2y-2}{2(x^2+y^2)+2y(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{-2y-2}{(x^2+y^2)(2y+2)}=-\frac{1}{(x^2+y^2)}=-\frac{1}{w}\qquad(y\neq-1)$$

yukarıdaki eşitlik sonucu, yalnızca w-ya bağlı bir fonksiyon elde edildi.

O halde Önbilgi2-Tablo: 3 den

$$\mu(w)=e^{\int \frac{\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}\frac{\partial w}{\partial x}-\bar{M}\frac{\partial w}{\partial y}}dw}=e^{-\int \frac{1}{w}dw}=e^{-\ell n w}=\frac{1}{w}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

……………..,,…….

II.yol: Denklemin

$$x\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}dy-(x^2+y^2+y)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}dx=0$$

$$\Rightarrow \tilde{M}=\left(-x^2-y^2-y\right)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha} \quad , \quad \tilde{N}=x\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=(-2y-1)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}+2\alpha y\left(-x^2-y^2-y\right)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} \\ \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}=\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}+2\alpha x^2\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ den her iki tarafı $\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}$ e bölelim

$$\Rightarrow (-2y-1)\left(x^2+y^2\right)+2\alpha y\left(-x^2-y^2-y\right)=x^2+y^2+2\alpha x^2$$

$$\Rightarrow -2\left(y+\alpha y+\alpha+1\right)x^2-2\left(y+\alpha y+\alpha+1\right)y^2=0$$

$$\Rightarrow y+\alpha y+\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

……………..,,…….

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ $(y\neq \pm x)$ ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim.

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}dy-(1+\frac{y}{x^2+y^2})dx=0$$

Bu son denklem için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M &= -1-\frac{y}{x^2+y^2} \\ N &= \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$u = \int M\,dx + f(y)$	$u = \int N\,dy + g(x)$
$= -x - \underbrace{\int \frac{y}{x^2+y^2}dx}_{=I_1} + f(y)$	$= \underbrace{\int \frac{x}{x^2+y^2}dy}_{=I_2} + g(x)$
$= -x - \arctan\frac{x}{y} + f(y) \quad \ldots$(A2-i)	$= -\arctan\frac{x}{y} + g(x) \quad \ldots$(A2-ii)

I_1 için $I_1 = -y\int \frac{1}{x^2+y^2}dx = \frac{y}{y}\int \frac{1}{(\frac{x}{y})^2+1}dx = -\arctan\frac{x}{y} + k_1$,

I_2 için benzer şekilde $I_2 = \arctan\frac{y}{x} + k_2$ bulunur, "$\arctan k + \arctan\frac{1}{k} = \frac{\pi}{2}$" özelliğinden

$I_2 = -(\arctan\frac{x}{y}) + \underbrace{\frac{\pi}{2} + k_2}_{=k_3 \text{ diyelim}} = -(\arctan\frac{x}{y}) + k_3$ yazılabilir.

(A2-i) ve (A2-ii) den: $g(x) = -x$, $f(y) = 0$ bulunur.

$\Rightarrow$ $u = -x - \arctan\frac{x}{y}$ olur. Genel Çözüm $u = -c$ idi.

$$\boxed{\Rightarrow \quad x + \arctan\frac{x}{y} = c \qquad [\text{Genel Çözüm}] \qquad I:\ y \neq 0,\ y \neq \pm x}$$

$y = 0$, $y \neq \pm x$ için çözüm araştırması:

$y=0$ denklemi sağlamaz dolayısıyla çözüm değildir. $y \neq \pm x$ denklemin çözümleridir. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümler denklemin birer *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B1. (Tam Diferansiyel denklem)

$(xy^2+\frac{1}{x})dx+(x^2y-\ell ny)dy=0$ için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M &= xy^2+\frac{1}{x} \\ N &= x^2y-\ell ny \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2xy=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

<table>
<tr><td colspan="2">$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$</td></tr>
<tr><td>$$u=\int M\,dx+f(y)$$ $$=\int (xy^2+\frac{1}{x})dx+f(y)$$ $$=\frac{x^2y^2}{2}+\ell n\left|x\right|+f(y) \quad \ldots\text{(B1-i)}$$</td><td>$$u=\int N\,dy+g(x)$$ $$=\int (x^2y-\ell ny)dy+g(x)$$ $$=\frac{x^2y^2}{2}+\underbrace{\int \ell ny\,dy}_{=I_1}+g(x)$$ $$=\frac{x^2y^2}{2}-y\ell ny+y+g(x) \quad \ldots\text{(B1-ii)}$$</td></tr>
</table>

(I_1 için kısmi integrasyon ile: $I_1=y\ell ny-y+k_1$ bulunur (*inceleyiniz!*).)

(A1-i) ve (A1-ii) den: $g(x)=\ell n\left|x\right|$, $f(y)=y-y\ell ny$ bulunur.

$\Rightarrow$ $u=\frac{x^2y^2}{2}+\ell n\left|x\right|+y-y\ell ny$ olur. Genel Çözüm $u=c$ idi.

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{x^2y^2}{2}+\ell n\left|x\right|+y-y\ell ny=c \qquad \text{[Genel Çözüm]} \\ &I:\ x\neq 0\,,\ y>0 \end{aligned}}$$

B2. (Lineer Diferansiyel denklem)

$y' + y\cot x = \sin 2x \;,\;\; y' + p(x)y = q(x) \;\Rightarrow\; p(x) = \cot x\,,\; q(x) = \sin 2x$

I.yol: $y = uv$ *dönüşümü yaparak:*

$$\left.\begin{aligned} y &= uv\,,\; u = u(x)\,,\; v = v(x) \\ y' &+ y\cot x = \sin 2x \\ y' &= u'v + uv' \end{aligned}\right\} \Rightarrow u'v + uv' + \cot x\,uv = v\underbrace{(u' + (\cot x)\,u)}_{=0} + uv' = \sin 2x$$

$$\Rightarrow u' + \cot x\,u = 0$$

$$\Rightarrow u = e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\int \cot x\,dx} = e^{-\ell n(\sin x)} = \frac{1}{\sin x}$$

(dikkat, integral sabiti 0 seçiliyor)

$$\Rightarrow uv' = \sin 2x \quad \Rightarrow v' = \sin x \sin 2x \quad \Rightarrow v = \underbrace{\int \sin x \sin 2x\,dx}_{=I_1}$$

I_1 integralini hesaplayalım:

$$I_1 = \int 2\sin^2 x \cos x\,dx$$

$$\Rightarrow \sin x = t \text{ dönüşümü uygulanırsa } \left(\Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x}dt\right):$$

$$I_1 = \int 2t^2\,dt = \frac{2t^3}{3} + c = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$

$\Rightarrow \; v = \dfrac{2}{3}\sin^3 x + c$ (v nin tespitinde: c integral sabitini eklemeyi UNUTMAYINIZ!)

$\Rightarrow$ genel çözüm: $y = uv$ den $y = \dfrac{1}{\sin x}\left(\dfrac{2}{3}\sin^3 x + c\right)$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{y=uv \text{ idi}} \quad y = \frac{2}{3}\sin^2 x + \frac{c}{\sin x} \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I: \;\; x \neq n\pi \;, n = 0, \mp 1, \ldots$$

II.yol: $v=e^{\int p(x)\,dx}$ *şeklinde integrasyon çarpanı bularak:*

$$v=e^{\int p(x)\,dx}=e^{\int \cot x\,dx}=e^{\ell n(\sin x)}=\sin x \text{ bulunur.}$$

Şimdi denklemin her iki tarafını $v=\sin x$ ile çarpalım:

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sin x\,y'+\cos x\,y}_{=(vy)'=(\sin x\,y)' \text{ oldugu görülür!}} = \sin x \sin 2x$$

$$\Rightarrow \quad (\sin x\,y)' = \sin x \sin 2x$$

Şimdi son denklemin her iki tarafının integralini alalım:

$$\Rightarrow \quad \sin x\,y = \int \sin x \sin 2x\,dx \quad , \quad I_1 \text{ den}$$

$$\Rightarrow \quad \sin x\,y = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{\sin x}\left(\frac{2}{3}\sin^3 x + c\right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{y=uv \text{ idi}} \quad y=\frac{2}{3}\sin^2 x+\frac{c}{\sin x} \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$$I: \quad x\neq n\pi \ , n=0,\mp1,\ldots$$

B3. **(**İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem**)**

$dy+(y-\sin x)\cos x\,dx=0$ için $\bar{M}\,dx+\bar{N}\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{c}\bar{M} = y\cos x - \sin x\cos x \\ \bar{N} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = \cos x \neq 0 = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

Ancak denklem, “integrasyon çarpanı “ ile Tam Dif. denklem haline getirilebilir mi? inceleyelim!

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{M}}{\partial y} - \dfrac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}} = \frac{\cos x - 0}{1} = \cos x$$

yalnızca x-e bağlı bir fonksiyon elde edildi. O halde Önbilgi2-Tablo:1 den

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial \bar{M}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}} dx} = e^{\int \cos x \, dx} = e^{\sin x}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu(x) = e^{\sin x}$.

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu(x) = e^{\sin x}$ ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim.

$$\Rightarrow \; e^{\sin x} dy + (y - \sin x)\cos x \, e^{\sin x} \, dx = 0$$

Bu son denklem için $M\,dx + N\,dy = 0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{c}M = (y - \sin x)\cos x \, e^{\sin x} \\ N = e^{\sin x}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \cos x \, e^{\sin x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$u = \int M\,dx + f(y)$ $= \underbrace{\int (y - \sin x)\cos x\, e^{\sin x}\,dx}_{=I_1} + f(y)$ $= ye^{\sin x} + (-1+\sin x)e^{\sin x} + f(y) \quad \ldots$(B3-i)	$u = \int N\,dy + g(x)$ $= \int e^{\sin x}\,dy + g(x)$ $= ye^{\sin x} + g(x) \;\ldots$(B3-ii)

(I_1 için $\sin x = t$ dönüşünü yapılarak; $I_1 = \int (y-t)e^t\,dt = y\int e^t\,dt + \underbrace{\int te^t\,dt}_{kısmi\ \text{int}egrasyon}$

şeklinde bulunur (*inceleyiniz*!).)

(B3-i) ve (B3-ii) den: $g(x) = (-1+\sin x)e^{\sin x}$, $f(y) = 0$ bulunur.

$\Rightarrow$ $u = ye^{\sin x} + (-1+\sin x)e^{\sin x} = (y-1+\sin x)e^{\sin x}$ olur. Genel Çözüm $u = c$ idi.

$$\boxed{\Rightarrow \quad (y-1+\sin x)e^{\sin x} = c \qquad [\textbf{Genel Çözüm}] \qquad I: -\infty < x < \infty}$$

B4. (İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem**)**

$(x\cos y - \sin^2 y)dy - \sin y\,dx = 0$ için $\bar{M}\,dx + \bar{N}\,dy = 0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{M} = -\sin y \\ \bar{N} = x\cos y - \sin^2 y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = -\cos y \neq \cos y = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

Ancak denklem, “integrasyon çarpanı “ ile Tam Dif. denklem haline getirilebilir mi? inceleyelim!

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{-\bar{M}}=\frac{-\cos y-\cos y}{\sin y}=-\frac{2\cos y}{\sin y}=-2\cot y$$

yalnızca y-ye bağlı bir fonksiyon elde edildi. O halde Önbilgi2-Tablo:2 den

$$\mu(y)=e^{\int \frac{\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{-\bar{M}}dy}=e^{-\int 2\cot y\, dy}=e^{-2\ell n(\sin y)}=\frac{1}{\sin^2 y}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu(y)=\dfrac{1}{\sin^2 y}$.

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu(y)$ ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim:

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1\right)dy-\frac{1}{\sin y}dx=0 \qquad (\sin y\neq 0)$$

Bu son denklem için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M&=-\frac{1}{\sin y}\\ N&=\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\cos y}{\sin^2 y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$u=\int M\,dx+f(y)$ $=-\int \frac{1}{\sin y}dx+f(y)$ $=-\frac{x}{\sin y}+f(y)\quad \ldots$(B4-i)	$u=\int N\,dy+g(x)$ $=\int (\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1)dy+g(x)$ $=-y+x\underbrace{\int \frac{\cos y}{\sin^2 y}dy}_{=I_1}+g(x)$ $=-y-\frac{x}{\sin y}+g(x)\ldots$(B4-ii)

(I_1 için $\sin y=t$ dönüşünü yapılarak; sonuçta $I_1=-\frac{1}{\sin y}+k_1$ bulunur (*inceleyiniz*!).)

(B4-i) ve (B4-ii) den: $g(x)=0$, $f(y)=-y$ bulunur.

$\Rightarrow\ u=-y-\frac{x}{\sin y}$ olur. Genel Çözüm $u=-c$ idi.

$$\boxed{\Rightarrow \quad y+\frac{x}{\sin y}=c \qquad [\textbf{Genel Çözüm}] \qquad I:\ y\neq n\pi\ ,n=0,\mp 1,\ldots}$$

$y=n\pi$ için çözüm araştırması:

Denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B5. (x-e göre Lineer Diferansiyel denklem**)**

$$x+y\ell ny=\frac{y}{y'}$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=\ell ny \qquad \Bigg| \qquad \frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)\ \Rightarrow\ p(y)=-\frac{1}{y},\ q(y)=\ell ny$$

integrasyon çarpanı bulma metodu ile çözelim:

$$v = e^{\int p(y)\,dy} = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ell ny} = \frac{1}{y} \quad \text{bulunur.}$$

Şimdi lineer denklemin her iki tarafını $v = \frac{1}{y}$ ile çarpalım: $(x' = \frac{dx}{dy})$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{y}x' - \frac{1}{y^2}x}_{=(vx)' = \left(\frac{1}{y}x\right)' \text{ oldugu görülür!}} = \frac{\ell ny}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{y}x\right)' = \frac{\ell ny}{y}$$

Şimdi son denklemin her iki tarafının integralini alalım:

$$\frac{1}{y}x = \underbrace{\int \frac{1}{y}\ell ny\,dy}_{=I_1}$$

I_1 hesaplanırsa: $I_1 = \frac{1}{2}\ell n^2 y + \frac{1}{2}c$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız*!).

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}x = \frac{1}{2}\ell n^2 y + c$$

$$\Rightarrow \quad x = y\left(\frac{1}{2}\ell n^2 y + c\right) \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$I: \ y > 0$

B6.

I. yol : Homojen denklemden çözüm bulunabilir!

II.yol : B1 deki yapılanlara benzer şekilde Tam Dif. denklemden çözüm bulunabilir!

III.yol : Gruplandırma: Önbilgi1-Tablo: 1 ve 2 den yararlanarak

$$(y-5x)dx+(x-5y)dy=0 \;\Rightarrow\; \underbrace{ydx+xdy}_{=d(xy)}-5(\underbrace{xdx+ydy}_{=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)})=0$$

$$\Rightarrow\; d(xy)-\frac{5}{2}d(x^2+y^2)=0 \;\Rightarrow\; d(xy-\frac{5}{2}(x^2+y^2))=0$$

$$\Rightarrow\quad xy-\frac{5}{2}(x^2+y^2)=c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ -\infty<x<\infty$$

B7. **(**Özel formda Lineer Denklem haline getirilebilen**)**

Bu denklem, aşağıdaki dönüşüm ile lineer hale daha getirilebilir:

$$\frac{1}{\cos^2 y}y'-\frac{1}{x}\tan y=1$$

$$\tan y=z \ ,\ z=z(x)$$

$$\underbrace{\left(1+\tan^2 y\right)}_{=\frac{1}{\cos^2 y}}y'=z'$$

$\Rightarrow\quad z'-\dfrac{1}{x}z=1$ (lineer denklem) elde edilir.

$$y'+p(x)y=q(x)$$

$$\Rightarrow\; p(x)=-\frac{1}{x},\ q(x)=1$$

Şimdi lineer denklemi, $z=uv$ dönüşümü ile çözelim :

$$\left.\begin{array}{c} z=uv\ ,\ u=u(x)\ ,\ v=v(x) \\ z'-\dfrac{1}{x}z=1 \\ z'=u'v+uv' \end{array}\right\} \Rightarrow\; u'v+uv'-\frac{1}{x}uv=v(\underbrace{u'-\frac{1}{x}u}_{=0})+uv'=1$$

$$\Rightarrow\; u'-\frac{1}{x}u=0$$

$$\Rightarrow\; u=e^{-\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ell nx}=x$$

(dikkat, integral sabiti 0 seçiliyor)

$$\Rightarrow \quad uv'=1 \quad \Rightarrow \quad v'=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad v=\int \frac{1}{x}\,dx$$

$\Rightarrow \quad v=\ell n|x|+c$ (v nin tespitinde: c integral sabitini eklemeyi UNUTMAYINIZ!)

$\Rightarrow$ genel çözüm: $z=uv$ den $z=x\left(\ell n|x|+c\right)$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{z=\tan y \text{ idi}} \quad \tan y=x\left(\ell n|x|+c\right) \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$I: \; x\neq 0 \;, y\neq (2n-1)\pi/2 \;, n=0,\mp 1,\ldots$

$y=(2n-1)\pi/2$ için çözüm araştırması: diferansiyel denklemi sağlamadığı için çözüm değildir.

B8. Gruplandırma: Önbilgi1-Tablo: 1 den yararlanarak

$$y'=-\frac{y}{x+\cos y} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ydx+xdy}_{=d(xy)}+5\cos y\,dy=0$$

$$\Rightarrow \quad \int d(xy)=-\int \cos y\,dy$$

$$\Rightarrow \quad xy=-\sin y+c \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$I: \; y\neq \arccos(-x)$

B9.

I. yol : B1 deki yapılanlara benzer şekilde Tam Dif. denklemden çözüm bulunabilir!

II.yol : Gruplandırma: Önbilgi1-Tablo: 1 ve 2 den yararlanarak

$$(y-x+\frac{1}{x})dx+(x+y)dy=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ydx+xdy}_{=d(xy)}+(\underbrace{-xdx+ydy}_{=-\frac{1}{2}d(x^2-y^2)})+\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{=d(\ell n|x|)}=0$$

$$\Rightarrow \ d(xy)-\frac{1}{2}d(x^2-y^2)+d(\ell nx)=0 \quad \Rightarrow \ d\left(xy-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\ell n|x|\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad xy-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\ell n|x|=c \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$$I:\ x\neq 0$$

B10. Gruplandırma:

$$\left(\frac{x\ell n(xy)}{x+y}-xy\right)dy+\left(\frac{y\ell n(xy)}{x+y}-xy\right)dx=0$$

$$\Rightarrow \ \frac{\ell n(xy)}{x+y}[xdy+ydx]=xydx+xydy$$

$$\Rightarrow \ \frac{\ell n(xy)}{x+y}\underbrace{[xdy+ydx]}_{=d(xy)}=xy\underbrace{[dx+dy]}_{=d(x+y)}$$

$$\Rightarrow \ \frac{\ell n(xy)}{xy}d(xy)=(x+y)d(x+y)$$

şimdi her iki tarafın integrali alınırsa, $\int \frac{\ell nu}{u}du=\frac{\ell n^2u}{2}+k_1$ *(inceleyip, ara işlemleri yapınız!)* ve $\int wdw=\frac{w^2}{2}+k_2$ bilgilerinden; $\frac{\ell n^2(xy)}{2}=\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{c}{2}$ bulunur.

$$\Rightarrow \quad \ell n^2(xy)=(x+y)^2+c \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$$I:\ y\neq -x\ ,\ xy>0$$