İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Diferansiyel Denklemler I (örgün-i.ö)

Ekim.2014

Ödevler 1-3
Çalışma Soruları 1-2
Arasınav Hazırlık Soruları

Hazırlayan: Yrd.Doç.Dr. Serkan İLTER

http://aves.istanbul.edu.tr/ilters/dokumanlar

Diferansiyel Denklemler I

Ödev Soruları –1 03.10.2014

A. *Aşağıda özellikleri verilen eğri ailelerinin diferansiyel denklemlerini oluşturunuz!*

1. Herhangi bir $A(x,y)$ noktasındaki teğet doğruları: O_x eksenini $(\frac{x}{2},0)$ noktasında kesiyor.
2. Herhangi bir noktasındaki teğetinin koordinat eksenlerinden ayırdığı parçaların uzunlukları çarpımı: değme noktasının apsisinin karesine eşit.
3. Merkezleri $y=2x$ doğrusu üzerinde bulunan ve yarıçapları 2 ye eşit olan çemberler ailesi.
4. Herhangi bir noktasında çizilen teğetlerin uzunlukları: sabit bir α sayısına eşit
5. Herhangi bir noktasındaki teğet-altı uzunluğu: bu noktanın koordinatlarının aritmetik ortalamasına eşit.
6. Odakları orjin ve köşe noktaları O_x üzerinde olan paraboller ailesi.
7. $y^2=2x$ parabolüne teğet olan doğrular ailesi.
8. $cy=\sin cx$ **9.** $y=x\tan(x+c)$ **10.** $(x-a)^2+by^2=1$

B. *Aşağıdaki dif. denk.ler için izoklin eğrilerini belirleyip ek olarak istenilenleri elde ediniz!*

1. $y'=x^2+4y^2$, $k=1,4$ değerlerine karşılık gelen izoklin eğrilerini çizip, üzerinde yönleri belirtiniz.

2. $y'=y$, izoklin yöntemini kullanarak ($k=-2,-1,0,1,2$ alıp yönleri belirleyerek); denklemin çözümlerini belirlemeye çalışınız!

C. *Aşağıda verilen fonksiyonların, yanlarında yazılı aralıklarda (her bir fonks. ve aralık için) diferansiyel denklemlerin çözümü olup olmadıklarını araştırınız!*

1. $y=x+\frac{x^2}{4}$, $(-\infty,\infty)$, $y'=1+\sqrt{y-x}$.

2. $x^2+y^2=0$, $(-1,1)$, $yy'=-x$.

3. $x^2-y^2=0$, $(-1,1)$, $yy'=x$.

4. $\dfrac{\ell n^2 y}{2} - \tan x = 0$, $(0,\dfrac{\pi}{2})$, $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$, $y = y' \cos^2 x \, \ell n y$.

5. $x^2 y' = 1$ denkleminin $(-1,1)$ de çözümü var mı?

Diferansiyel Denklemler I

Ödev Soruları –2 15.10.2014

A. *Aşağıda verilen denklemlerin; "hangi tip denklem olduklarını (nedenleri ile belirterek) belirleyiniz! "yanlarında koşul var ise, istenen koşulu sağlayan çözümünü", "koşul yok ise, tüm çözümlerini (genel çözüm ve varsa tekil çözümlerini) çözümün geçerli olduğu değişkenlerin tanım aralıklarını da vererek" bulunuz.*

1. $(1+e^{-x})dy-(y^2-1)dx=0$	**10.** $3y^2y'+16x=2xy^3$ "$x\to+\infty$ iken $y(x)$ sınırlı"
2. $y'=3(y+1)+2x$	**11.** $\sqrt{y^2-1}\,dx+xy\,dy=0$
3. $x^2y'+2=x^2y^2$	**12.** $\dfrac{x-xy'}{\sin(x-y)}=1$, $y(\pi/2)=0$
4. $x^2y'-\cos 2y=1$, $y(+\infty)=\dfrac{9\pi}{4}$	**13.** $(y+\sqrt{xy}\,)\,dx=xdy$
5. $y'-xy+xy^3=0$, $y(0)=1/2$	**14.** $y-xy'=y\,\ell n\,\dfrac{x}{y}$
6. $\left[x\cos^2(\frac{y}{x})-y\right]dx+xdy=0$	**15.** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$
7. $\tan x\,dy-y\ell ny\,dx=0$	**16.** $\dfrac{2}{3}xyy'-y^2=\sqrt{x^6-y^4}$
8. $3y^2y'+16x=2xy^3$	
9. $y'=\dfrac{y-2x+1}{2y-x-1}$	

B. Aşağıda verilen $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ denklemleri için, ilk aşama olarak $p=u$, $q=v$ dönüşümü yaparak, son halde denklemi "değişkenlerine ayrılabilir" şekle getiriniz!

1. $p=x+a$, $q=y+bx$	**3.** $p=x+y$, $q=x-y$
2. $p=y-2x+1$, $q=x-2y+1$	**4.** $p=x+ay-1$, $q=y+bx+1$

C. *Aşağıda istenilenleri elde ediniz! (denklem çözümü öncesinde; oluşturduğunuz denklemde eğer var ise, mutlak değerleri göz ardı edebilirsiniz!)*

1. $A(0,1)$ noktasından geçen ve herhangi bir noktasındaki teğet-altı uzunluğu: bu noktanın koordinatlarının aritmetik ortalamasına eşit olan eğriyi bulunuz.

2. $A(1,1)$ noktasından geçen ve herhangi bir noktasındaki teğetinin O_y ekseninden ayırdığı parçanın uzunluğu: değme noktasının apsisinin karesine eşit olan eğriyi bulunuz.

3. $A(e,1)$ noktasından geçen ve herhangi bir noktasındaki teğetinin O_x ekseninden ayırdığı parçanın uzunluğu: değme noktasının ordinatının iki katına eşit olan eğriyi bulunuz

4. Orjinden geçen bir eğrinin, herhangi bir $A(x,y)$ noktasından koordinat eksenlerine paralel doğrular çizilerek iki parçadan oluşan bir dikdörtgensel bölge meydana getirilmektedir. Öyle bir eğri ailesi bulunuz ki, her bir eğri için dikdörtgensel bölgenin bir parçasının alanı, diğer parçasının alanının üç katı olsun.

Bölüm sonu beklenen kazanımlar:

- *Farklı denklem türlerini (sorularda tür ve çözüm hakkında herhangi bir yönlendirme yapılmaksızın); kısa sürede tespit etme (denklemleri sınıflandırabilme)!*
- *Geometrik özellikleri kullanabilme!*
- *Çözüm kavramlarını (Genel çözüm-Tekil çözüm) algılayabilme, çözümün geçerli olacağı aralıkları tespit edebilme!*
- *"Başlangıç koşulları" veyahut "farklı şekillerde verilen koşullar" yardımıyla denklemin istenilen özel çözümlerinin tespit edilebilmesi!*
- *Denklem çözümleri için; aranan fonksiyon ve bağımsız değişkene göre (herhangi bir yöntemi ezberlemeden) dönüşümler yapabilme, uygun dönüşümleri araştırabilme!*

Ödev Soruları –3 29.10.2014

A. *Aşağıda verilen denklemlerin; "hangi tip denklem olduklarını (nedenleri ile belirterek) belirleyiniz!" "yanlarında $\mu = \mu(x,y)$ integrasyon çarpanı var ise önce tam dif. hale getirilerek" "yanlarında koşul var ise, istenen koşulu sağlayan çözümünü", "koşul yok ise, tüm çözümlerini (genel çözüm ve varsa tekil çözümlerini) çözümün geçerli olduğu değişkenlerin tanım aralıklarını da vererek" bulunuz.*

1. $x^2 dy + (xy - \tan xy) dx = 0$	**10.** $y' + 2(\cot x) y = \cos x$
2. $(x - 3y)\, dx - x\, dy = 0$	**11.** $xy' - 3y = x^3 + x^2$
3. $y' + (\cos x) y = 3 \sin x \cos x$	**12.** $(x^2 + y^2 + x) dx + xy\, dy = 0$
4. $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$, $y(\pi) = \pi / 4$	**13.** $(2y + \frac{y}{x})\, dx + (2x + \frac{x}{y})\, dy = 0$, $\mu = \mu(xy)$
5. $(ye^{xy} - \frac{1}{y})\, dx + (xe^{xy} - \frac{1}{x})\, dx = 0$	**14.** $y' + \frac{\sin 2y}{2x} = -\sin^2 y$
6. $(x - 2y)\, dx + y\, dy = 0$, $\mu = \mu(x - y)$	**15.** $\left(x^2 + y^2 + x \sin x\right) dx + y \sin x\, dy = 0$
7. $y' - \frac{2}{\sin 2x} y = \frac{1}{\sin x}$	**16.** $(\cos x \cos y - \cot y)\, dy - (\sin x \sin y)\, dx = 0$
8. $(2x + \tan y)\, dx + (x - x^2 \tan y)\, dy = 0$	**17.** $(x - \sin y)\, dy + y\, dx = 0$
9. $(xy^2 - \ell n x)\, dx + (x^2 y + \frac{1}{y})\, dy = 0$	**18.** $2yy' = \ell n x + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} - y'$

B. Aşağıdaki denklemleri, belirlediğiniz uygun hipotezler altında, bir diferansiyel denklem problemine dönüştürerek çözümlerini bulunuz.

1. $y = \frac{1}{2} x^4 + 2 \int_1^x \frac{y(t)}{t}\, dt$	**3.** $\int_0^x (x - t) y(t)\, dt = 2x + \int_0^x y(t)\, dt$
2. $x = y - \int_e^y \frac{x(t)}{t \ell n\, t}\, dt$	**4.** $y = x^2 + 2 \int_0^x x\, dt$

C. 1. Bir $y' + p(x)y = q(x)$ lineer diferansiyel denklemin y_1 ve y_2 $(y_1 \neq y_2)$ gibi iki özel çözümü bilindiği taktirde (hiç integral işlemi yapmadan) genel çözümün bulunabileceğini gösteriniz.

2. C1 den yararlanarak $y_1 = 1$ $y_2 = 1 + e^{-x^2}$ özel çözümleri verilen lineer diferansiyel denklemi ve bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

D. 1. $\frac{1}{\sqrt{xy}}dx + (\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{x}{y^k}})\,dy = 0$ denkleminin *tam diferansiyel denklem* olabilmesi için uygun k sayısını belirleyiniz. Bu k sayısı için tam diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

2. α ve β nın hangi değerleri için $y' = ax^\alpha + by^\beta$ denklemi $y = z^m$ dönüşümü yardımıyla bir homojen diferansiyel denklem haline getirilebilir?

3. α ve β nın hangi değerleri için $\mu = x^\alpha y^\beta$; $(2x^4y^2 + 3x)dy + (x^3y^3 - y)dx = 0$ denkleminin (tam diferansiyel hale getiren) bir integrasyon çarpanı olur?

Diferansiyel Denklemler I

Çalışma Soruları –1 18.10.2014

A. *Aşağıda istenilenleri elde ediniz!*

1. $A(1,-1)$ noktasından geçen ve herhangi bir noktasında teğetinin ordinat ekseninde ayırdığı parçanın uzunluğu, değme noktasının apsisine eşit olan eğriyi bulunuz. *(Not: oluşturduğunuz denklemdeki mutlak değeri göz ardı edebilirsiniz).*

2. $\ell n y = ax + by$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini oluşturunuz.

B. *Aşağıda verilen denklemlerin; "hangi tip denklem olduklarını (nedenleri ile belirterek) belirleyiniz! "yanlarında koşul var ise, istenen koşulu sağlayan çözümünü", "koşul yok ise, tüm çözümlerini (genel çözüm ve varsa tekil çözümlerini) çözümün geçerli olduğu değişkenlerin tanım aralıklarını da vererek" bulunuz.*

1. $xy' = e^y + 2y'$

2. $(x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0$

3. $y' = \dfrac{y}{x-\sqrt{xy}}$

4. $y' + (1-y^2)\tan x = 0$

5. $(x+2y+7)y' + 2x - y + 4 = 0$

6. $(x+y)^2 y' = 1$

7. $y' = x^2 e^{y-x^3}$, *i)* $y(0)=0$,

ii) $y(+\infty) = 0$

8. $y' = 4\sqrt{x-y+1}$

9. $\dfrac{x-xy'}{\cos(x-y)} = 1$, $y(1)=1$

10. $(x+y)dx + (3x+3y-1)dy = 0$

11. $(x+y)y' = x - y$

12. $y = 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{t-y(t)}{t+y(t)}\,dt$

(önce bir dif.denk. problemine dönüştürünüz!)

13. $x^2y^2y' + xy^3 = -1$

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..

Çözümler...

(**son güncelleme : 17.10.2014**)

A1.

....

Önbilgi:

$y = y(x)$ eğrisinin $M(x, y)$ noktasındaki Teğet Denklemi ((X,Y) teğet üzerindeki keyfi nokta) : $Y - y = y'(X - x)$

Teğetinin ordinat ekseninde ayırdığı parçanın uzunluğu denklemde $X = 0$ yazılarak (yani $Y = y - y'x$), x-ekseninde ayırdığı parçanın uzunluğu $Y = 0$ yazılarak (yani $X = x - \frac{y}{y'}$),

bulunabilir. Ek olarak, "Teğet-altı uzunluğu: $\frac{y'}{y}$" ; "Teğet uzunluğu: $\sqrt{y^2 + \left(\frac{y'}{y}\right)^2}$" şeklinde

bulunacaktır (*Şekil üzerinde gözlemleyiniz!*)

....

$\Rightarrow$ $Y = y - y'x$, bu da değme noktasının apsisine eşit olacak yani $Y = x$

$$\left.\begin{array}{l} Y = |y - y'x| \\ Y = x \end{array}\right\} \Rightarrow |y - y'x| = x \;\;,\; x > 0$$

$$\Rightarrow \; y' = \frac{y}{x} - 1 \quad \text{(homojen denklem)}$$

$$\Rightarrow \; y = cx - x\ell n\, x \quad [\text{Genel Çözüm}]$$ bulunacaktır (*İnceleyiniz!*)

$A(1,-1)$ noktasından geçtiğine göre:

$$\left.\begin{array}{c} y(1) = -1 \\ \text{yani } x = 1 \text{ için } y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ genel çözümden: } -1 = c - \ell n 1 \;\Rightarrow\; c = -1$$

O halde istenilen çözüm : $y = -x(1 + \ell n\, x)$

A2. Amacımız verilen eğri ailesini genel çözüm kabul eden dif. denk. i belirlemek olduğundan; eğri ailesinde iki keyfi sabit olması sebebiyle, "ikinci mertebe adi dif. denk." elde etmeye çalışacağız!

$$\ell ny = ax + by \qquad (i)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \quad \frac{y'}{y} = a + by' \qquad (ii)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \quad \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y} = by'' \quad (iii)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(iii)\ den} \quad b = \frac{1}{y} - \frac{y'^2}{y^2 y''}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(ii)\ den} \quad a = \frac{y'}{y} + by' = \frac{y'}{y} - \frac{y'}{y} + \frac{y'^3}{y^2 y''} = \frac{y'^3}{y^2 y''}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(i)\ den} \quad \ell ny = ax + by = \left(\frac{y'^3}{y^2 y''}\right)x + \left(\frac{1}{y} - \frac{y'^2}{y^2 y''}\right)y$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{her iki taraf } y^2 y'' \text{ ile çarpılırsa}} \quad y^2 y'' \ell ny = xy'^3 + y^2 y'' - yy'^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad y^2 y''(1 - \ell ny) = y'^2 (xy' - y)}$$

B1. (Değişkenlerine Ayrılabilir denklem)

$$xy' = e^y + 2y' \quad \Rightarrow \quad \int e^{-y}\, dy = \int \frac{1}{x-2}\, dx \quad , \ x \neq 2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Rightarrow \quad -e^{-y} = \left(\ell n\left|x-2\right|\right) + c & [\textbf{Genel Çözüm}] \\ I:\ x \neq 2 & \end{array}}$$

B2. (Homojen denklem)

$p\,dx + q\,dy = 0$ yazımından; $p(x,y) = x - 3y$, $q(x,y) = 2y - 3x$ fonksiyonları 1.mertebeden homojendirler (*gözlemleyiniz!*).

$$(x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0 \ \Rightarrow \ y' = \frac{x-3y}{2y-3x} = \frac{1 - 3(\frac{y}{x})}{2(\frac{y}{x}) - 3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{x}=u,\ y=xu\ ,\ u=u(x) \\ &y'=\frac{1-3u}{2u-3} \end{aligned}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} y'=u+xu'=\frac{1-3u}{2u-3}$$

$$\Rightarrow\ xu'=\frac{1-3u}{2u-3}-u$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\int\frac{2u-3}{1-2u^2}\,du}_{=I_1}=\int\frac{1}{x}\,dx \qquad (x\neq 0,\ u^2\neq\frac{1}{2})$$

I_1 integralini hesaplayalım:

$$I_1=\underbrace{\int\frac{2u}{1-2u^2}\,du}_{=I_2}-3\underbrace{\int\frac{1}{1-2u^2}\,du}_{=I_3}$$

$$\Rightarrow\ I_2=-\frac{1}{2}\ell n\left|1-2u^2\right|+k_1$$

I_3 için $\dfrac{1}{1-2u^2}=\dfrac{1/2}{1-\sqrt{2}u}+\dfrac{1/2}{1+\sqrt{2}u}$ gözleminden,

$I_3=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ell n\left|\dfrac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right|+k_2$ olduğu kolayca görülür.

$$\Rightarrow\ I_1=I_2-3I_3=-\frac{1}{2}\ell n\left|1-2u^2\right|-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ell n\left|\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right|+k_1+k_2$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\ell n\left|1-2u^2\right|-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ell n\left|\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right|=\ell n\left|x\right|+\ell n\left|c\right|$$

$$\Rightarrow\qquad \left(1-2u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u}\right)^{-\frac{3}{2\sqrt{2}}}=cx$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\text{ idi}}\qquad \left(1-\frac{2y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}\,\frac{y}{x}}{1-\sqrt{2}\,\frac{y}{x}}\right)^{-\frac{3}{2\sqrt{2}}}=cx \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ x\neq 0,\ \ y\neq\mp\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$u^2=\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ için çözüm araştırması:

$\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ bulunur, bu eğriler diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ çözümünün denklemin bir *Özel-Çözümü* iken, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ çözümünün denklemin bir *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B3. (Homojen denklem)

$p\,dx+q\,dy=0$ yazımından; $p(x,y)=-y$, $q(x,y)=x-\sqrt{xy}$ fonksiyonları 1.mertebeden homojendirler (*gözlemleyiniz!*). $y'=\dfrac{y}{x-\sqrt{xy}}=\dfrac{y/x}{1-\sqrt{y/x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y}{x}=u,\ y=xu\,,\ u=u(x)\\[2ex] y'=\dfrac{u}{1-\sqrt{u}}\end{array}\right\}\ \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}}\ y'=u+xu'=\dfrac{u}{1-\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow\ xu'=\frac{u}{1-\sqrt{u}}-u$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\int\frac{1-\sqrt{u}}{u\sqrt{u}}\,du}_{=I_1}=\int\frac{1}{x}\,dx \qquad (x\neq 0,\ u\neq 0)$$

I_1 integralini hesaplayalım:

$$I_1=\int\frac{1}{u\sqrt{u}}\,du-\int\frac{1}{u}\,du$$

$$=\int u^{-3/2}\,du-\int\frac{1}{u}\,du$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{u}}-\ell n\,|u|+k_1$$

$$\Rightarrow\ -\frac{2}{\sqrt{u}}-\ell n\,|u|=\ell n\,|x|+\ell n\,|c|\ \Rightarrow\ -\frac{2}{\sqrt{u}}=\ell n\,|cxu|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\text{ idi}}\qquad -\frac{2}{\sqrt{y/x}}=\ell n\,|cy| \qquad [\textbf{Genel Çözüm}]$$

$I:\ x\neq 0,\ \ y\neq 0$

$u=\frac{y}{x}=0 \;\Rightarrow\; y=0$ için çözüm araştırması:

$y=0$ diferansiyel denklemi sağlar ($x\neq 0$) (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümün denklemin bir *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B4. (Değişkenlerine Ayrılabilir denklem)

$$y'+(1-y^2)\tan x=0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\int \frac{1}{1-y^2}\,dy}_{=I_1}=-\underbrace{\int \tan x\,dx}_{=I_2} \quad (\,y^2\neq 1\;,x\neq(2n-1)\pi/2\;,n=0,\mp1,\ldots)$$

I_1 ve I_2 integrali hesaplanırsa: $I_1=\frac{1}{2}\ell n\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+k_1$, $I_2=\ell n\left|\cos x\right|+k_2$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=\ell n\left|\cos x\right|+\frac{1}{2}\ell n\left|c\right|$$

$$\Rightarrow\; \frac{1+y}{1-y}=c\cos^2 x$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad y=\frac{-1+c\cos^2 x}{1+c\cos^2 x} \qquad [\textbf{Genel Çözüm}] \qquad I:\; y^2\neq 1\;,x\neq(2n-1)\pi/2\;,n=0,\mp1,\ldots}$$

$y^2=1 \;\Rightarrow\; y=\mp1$ için *çözüm araştırması yapınız!*

B5. (Homojen hale getirilebilen denklem)

I.yol : $y'=\frac{-2x+y-4}{x+2y+7}$,

$$\left.\begin{array}{l} -2x+y-4=0 \\ x+2y+7=0 \end{array}\right\}$$

$-2\neq 2 \;\Rightarrow$ doğruları kesişirler. Dikkat edilirse, Kesişim Noktası: $(-3,-2)$ dir.

Orjin: $(-3,-2)$ ye taşınırsa (ötelenirse), yani "denklem için $\bar{x}=x+3$, $\bar{y}=y+2$ dönüşümü yapılırsa", denklem: Homojen hale gelecektir.

$$\left.\begin{array}{c} \bar{x}=x+3\,,\ \bar{y}=y+2 \\ \bar{y}=\bar{y}(\bar{x}) \\ d\bar{x}=dx\,,\ d\bar{y}=dy \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{-2\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}+2\bar{y}}=\frac{-2+(\bar{y}/\bar{x})}{1+2(\bar{y}/\bar{x})}$$

(Homojendir,*gözleyiniz!*)

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}=u,\ \bar{y}=\bar{x}u\,,\ u=u(t) \\ \bar{y}'=\dfrac{-2+u}{1+2u} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\bar{x}\text{-ye göre türev}} \bar{y}'=u+\bar{x}u'=\frac{-2+u}{1+2u}$$

$$\Rightarrow\ \bar{x}u'=\frac{-2+u}{1+2u}-u$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\frac{1}{2}\int\frac{1+2u}{1+u^2}\,du}_{=I_1}=-\int\frac{1}{\bar{x}}\,d\bar{x}\qquad (\bar{x}\neq 0)$$

I_1 integrali hesaplanırsa: $I_1=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{2}\ell n(1+u^2)+k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{2}\ell n(1+u^2)=-\ell n\left|\bar{x}\right|+\frac{1}{2}c$$

$$\Rightarrow\ \arctan u+\ell n(1+u^2)=-2\ell n\left|\bar{x}\right|+c$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\frac{y+2}{x+3}\ \text{idi}}\ \arctan\left(\frac{y+2}{x+3}\right)+\ell n\left(1+\left(\frac{y+2}{x+3}\right)^2\right)=-2\ell n\left|x+3\right|+c$$

[**Genel Çözüm**]

$I:\ x\neq -3$

II.yol : $\underbrace{(2x-y+4)}_{=u}dx+\underbrace{(x+2y+7)}_{=v}dy=0$,

$$\left.\begin{aligned} du &= 2dx - dy \\ dv &= dx + 2dy \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5dx = 2du + dv\ , \quad 5dy = -du + 2dv \quad \text{(denklemde yerine yazalım)}$$

$$\Rightarrow u(2du + dv) + v(-du + 2dv) = 0$$

$$\Rightarrow (2u - v)du + (u + 2v)dv = 0 \quad \text{(Homojendir,}\textit{gözleyiniz!}\text{)}$$

Şimdi $u = tv$ dönüşümü yapalım. $\Rightarrow$ $du = vdt + tdv$ (denklemde yerine yazalım)

$$\Rightarrow (2vt - v)(vdt + tdv) + (vt + 2v)dv = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2(2t-1)dt + 2v(t^2+1)dv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t-1}{t^2+1}v^2dt + \frac{2}{v}dv = 0 \quad \text{(Değiş.Ayrılabilir)} \quad (v \neq 0) \text{ elde edilir}$$

(*geri kalan integral hesabı I.yol ile aynı, tamamlamak okuyucuya bırakılmıştır!*)

B6. ($y' = f(ax + by + c)$ formatında Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

Denklem, $x + y = u$ dönüşümü ile Değişkenlerine Ayrılabilir hale getirilebilir:

$$\left.\begin{aligned} &x + y = u\,,\ u = u(x) \\ &y' = \frac{1}{u^2} \end{aligned}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} 1 + \underbrace{y'}_{=\frac{1}{u^2}} = u' \Rightarrow \frac{u^2}{u^2+1}du = dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{u^2}{u^2+1}du}_{=I_1} = \int dx$$

I_1 integrali hesaplanırsa: $I_1 = u - \arctan u + k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız*!).

$$\Rightarrow \quad u - \arctan u = x + c$$

$$\boxed{\underbrace{\Rightarrow}_{u=x+y \text{ idi}} \quad x + y - \arctan(x+y) = x + c \quad \text{[Genel Çözüm]} \qquad I:\ -\infty < x < \infty}$$

B7. (Değişkenlerine Ayrılabilir denklem**)**

$$y' = x^2e^ye^{-x^3} \quad \Rightarrow \quad \int e^{-y}\,dy = \int x^2e^{-x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad -e^{-y} = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I: \; -\infty < x < \infty$$

Şimdi denklemin verilen koşulundan sağlayan çözümünü bulalım.

$$\left.\begin{array}{c} y(0)=0 \\ \text{yani } x=0 \text{ için } y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ genel çözümden: } -1 = -\frac{1}{3} + c \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$$

Benzer şekilde, $y(+\infty)=0$ dan $-e^0 = -\frac{1}{3}\underbrace{e^{-\infty^3}}_{=\left(\frac{1}{e}\right)^{\infty}=0} + c \Rightarrow c = -1$

O halde *i)* için, istenilen çözüm :	$3e^{-y} = 2 + e^{-x^3}$
O halde *ii)* için, istenilen çözüm :	$3e^{-y} = 3 + e^{-x^3}$

B8. ($y' = f(ax+by+c)$ formatında Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

Dikkat: $x-y+1=u$ dönüşümü yapmaktansa, kareköklü ifadeden ötürü kolaylık olsun diye bu sefer $x-y+1=u^2$ dönüşümü yapalım: (bu dönüşümü yaparken denklemin yalnızca $x-y+1 \geq 0$ durumunda tanımlı olduğuna da dikkat ediyoruz)

$$\left.\begin{array}{c} x-y+1=u^2, \; u=u(x) \\ y'=4u \end{array}\right\} \underset{x\text{-e göre türev}}{\Rightarrow} 1 - \underbrace{y'}_{=4u} = 2uu' \Rightarrow 1-4u = 2uu'$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{2u}{1-4u}\,du}_{=I_1} = \int dx \qquad \left(u \neq \frac{1}{4}\right)$$

I_1 için: $\frac{2u}{1-4u} = -\frac{1}{2} + \frac{1/2}{1-4u}$ gözleminden, $I_1 = -\frac{u}{2} - \frac{1}{8}\ell n|1-4u| + k_1$ olduğu kolayca görülür.

$$\Rightarrow \quad -\frac{u}{2} - \frac{1}{8}\ell n|1-4u| = x + c \qquad \ldots\text{(B8-1)}$$

bulunur $x-y+1=u^2$ idi $\Rightarrow$ $u=\mp\sqrt{x-y+1}$ değerinin (B8-1) de yerine yazılmasıyla Genel Çözüm elde edilir ($I:\ x-y+1\geq 0,\ y\neq x+\frac{15}{16}$).

$u=\sqrt{x-y+1}=\frac{1}{4}$ için çözüm araştırması:

$\sqrt{x-y+1}=\frac{1}{4}$ den $y=x+\frac{15}{16}$ bulunur, bu eğri diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümün denklemin bir *tekil- çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B9. **(** Özel-formda Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

$$x-xy'=\cos(x-y)\quad\Rightarrow\quad x(1-y')=\cos(x-y)$$

olduğundan dikkat edilirse, $x-y=u$, $u=u(x)$ dönüşümü yapıldığında $x-y=u$ ifadesinin x-e göre türevi $1-y'=u'$ olacağından denklem $xu'=\cos u$ değişkenlerine ayrılabilir hale gelir :

$$\Rightarrow\ x\underbrace{(1-y')}_{=u'}=\cos(\underbrace{x-y}_{=u})$$

$$\Rightarrow\ xu'=\cos u\ \Rightarrow\ \underbrace{\int\frac{1}{\cos u}du}_{=I_1}=\int\frac{1}{x}dx\qquad(\cos u\neq 0)$$

$\Rightarrow I_1=\ell n\left|\frac{1}{\cos u}+\tan u\right|+k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow\ \ell n\left|\frac{1}{\cos u}+\tan u\right|=\ell n\,|x|+\ell n\,c\qquad\Rightarrow\ \frac{1}{\cos u}+\tan u=cx$$

$\Rightarrow\ 1+\sin u=cx\cos u$ bulunur.

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=x-y\text{ idi}}\qquad 1+\sin(x-y)=cx\cos(x-y)\qquad[\text{Genel Çözüm}]$$

$$I:\ \ x\neq 0\ ,y\neq x-(2n-1)\pi/2\ ,n=\mp1,\mp3,\mp5...$$

$u = x - y = (2n-1)\pi/2 \quad (n = 0, \mp 1, \dots) \Rightarrow \quad y = x - \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ için çözüm araştırması:

Bu eğri diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, $n = 0, \mp 2, \mp 4\dots$ için $y = x - \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$: denklemin *özel-çözümleridir*; $n = \mp 1, \mp 3, \mp 5\dots$ için $y = x - \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$: denklemin *tekil- çözümleridir* (*gözlemleyiniz!*).

B10. ($y' = f(ax+by+c)$ formatında Değişkenlerine-Ayrılabilir hale getirilebilen denklem**)**

$y' = -\dfrac{x+y}{3(x+y)-1}$. Denklem, $x+y=u$ dönüşümü ile Değişkenlerine Ayrılabilir hale getirilebilir:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=u\,,\ u=u(x) \\ y' = -\dfrac{u}{3u-1} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} 1 + \underbrace{y'}_{=-\frac{u}{3u-1}} = u' \Rightarrow \frac{3u-1}{2u-1}\,du = dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{3u-1}{2u-1}\,du}_{=I_1} = \int dx \quad (u \neq 1/2)$$

I_1 integrali hesaplanırsa: $I_1 = \dfrac{3}{2}u + \dfrac{1}{4}\ell n\left|2u-1\right| + k_1$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*).

$$\Rightarrow \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}\ell n\left|2u-1\right| = x + c$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{\Rightarrow}_{u=x+y \text{ idi}} \quad \dfrac{3}{2}(x+y) + \dfrac{1}{4}\ell n\left|2x+2y-1\right| = x + c \quad [\text{Genel Çözüm}] \\ I:\ y \neq -x + \dfrac{1}{2} \end{array}}$$

$u = x + y = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -x + \dfrac{1}{2}$ için çözüm araştırması:

Bu eğri diferansiyel denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümün denklemin bir *tekil- çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B11. (Homojen denklem)

$p\,dx + q\,dy = 0$ yazımından; $p(x,y) = y - x$, $q(x,y) = x + y$ fonksiyonları 1.dereceden homojendirler (*gözlemleyiniz!*). $y' = \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1-y/x}{1+y/x}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = u,\ y = xu\ ,\ u = u(x) \\[2ex] \quad y' = \dfrac{1-u}{1+u} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{x\text{-e göre türev}} \quad y' = u + xu' = \dfrac{1-u}{1+u}$$

$$\Rightarrow \quad xu' = \frac{1-u}{1+u} - u \ \Rightarrow\ -\int \frac{1+u}{u^2+2u-1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$(\, x \neq 0\ ,\ u^2 + 2u \neq 1)$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\ell n\left|u^2+2u-1\right| = \ell n\,|x| - \frac{1}{2}\ell n\,|c|$$

$$\Rightarrow\ u^2 + 2u - 1 = \frac{c}{x^2}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x}\ \text{idi}} \qquad (\frac{y}{x})^2 + \frac{2y}{x} - 1 = \frac{c}{x^2} \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\ x \neq 0\ ,\ y^2 + 2xy \neq x^2$$

B12. (Belirli integral içeren denklemi: bir dif. denk. problemine dönüştürme)

Uygun koşullar altında, aşağıdaki özellik geçerlidir. <u>Bu koşulları belirlemek ise okuyucuya bırakılmıştır</u> ("İntegral Hesabın Temel Teoreminin 1.kısmından" yararlanabilirsiniz!), (*dolayısıyla belirlemeden aşağıdaki özelliği kullanma hakkına sahip değilsiniz!*)

$$\text{“}\, y' = f(x,y),\ y(a) = b\,\text{”} \ \Leftrightarrow\ \text{“}\, y = b + \int_a^x f(t, y(t))\,dt\,\text{”}$$

$$y = 1 + \int_1^x \frac{t - y(t)}{t + y(t)}\, dt \;\Rightarrow\; \text{“} y' = \frac{x-y}{x+y}\,,\; y(1) = 1\text{”}$$

$\Rightarrow$ B11 deki denklem için, bir Başlangıç-Değer problemidir.

$\Rightarrow$ Genel Çözüm: $(\frac{y}{x})^2 + \frac{2y}{x} - 1 = \frac{c}{x^2}$ idi.

$$\left.\begin{array}{c} y(1) = 1 \\ \text{yani } x = 1 \text{ için } y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ genel çözümden: } (\frac{1}{1})^2 + \frac{2}{1} - 1 = \frac{c}{1^2} \;\Rightarrow\; c = 2$$

$$\boxed{\text{O halde istenilen çözüm : } \quad y^2 + 2xy - x^2 = 2}$$

Not: *Çözümün, çözüme başlarken bahsedilen uygun koşulları sağladığı gözlemlenmeli, aksi halde çözüm olamayacaktır!*

B13. (Genelleştirilmiş Homojen denklem**)**

$F(x, y, dx, dy) := x^2 y^2 dy + (xy^3 + 1)dx = 0$

$x \to tx$, $y \to t^k y$, $dy \to t^{k-1} dy$, $dx \to dx$ yazımları yapıldığında, $k = -\frac{1}{3}$ için $F(tx, t^k y, dx, t^{k-1}dy) = t^0 F(x, y, dx, dy)$ eşitliği sağlanır $\Rightarrow$ Denklem: Genelleştirilmiş Homojendir.

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{y}{x^{-1/3}},\; y = x^{-1/3} u, \\ u = u(x) \\ y' = \dfrac{-1 - xy^3}{x^2 y^2} \\ \quad = x^{-4/3}\left(\dfrac{-1-u^3}{u^2}\right) \end{array}\right\} \underset{x\text{-e göre türev}}{\Rightarrow} y' = -\frac{1}{3} x^{-4/3} u + x^{-1/3} u'$$

$$\Rightarrow\; x^{-4/3}\left(\frac{-1-u^3}{u^2} + \frac{1}{3}u\right) = x^{-1/3} u'$$

$$\Rightarrow\; \frac{3u^2}{3 + 2u^3} du = -\frac{1}{x} dx \quad \text{(Değiş.Ayrılabilir)} \quad (x \neq 0\,,\; 2u^3 \neq -3) \text{ elde edilir}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3u^2}{3+2u^3}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ell n\left|3+2u^3\right| = -\ell n\left|x\right| + \frac{1}{2}\ell n\left|c\right| \;\Rightarrow\; 3+2u^3 = \frac{c}{x^2}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{u=\frac{y}{x^{-1/3}}\text{ idi}} \quad y^3 = \frac{c}{2x^3} - \frac{3}{2x} \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$$I:\; x \neq 0\,,\; 2y^3 \neq -3$$

Diferansiyel Denklemler I

Çalışma Soruları –2 29.10.2014

A. *Aşağıda istenilenleri elde ediniz!*

1. $(xe^y + x)\,dy + (e^y + ky)\,dx = 0$ denkleminin *tam diferansiyel denklem* olabilmesi için uygun k sayısını belirleyiniz. Bu k sayısı için tam diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

2. α nın hangi değeri için $\mu = \left(x^2 + y^2\right)^\alpha$: $xdy - (x^2 + y^2 + y)dx = 0$ denkleminin (tam diferansiyel hale getiren) bir integrasyon çarpanı olur? belirleyiniz, bu çarpanı kullanarak denklemin çözümünü bulunuz.

B. *Aşağıda verilen denklemlerin; "hangi tip denklem olduklarını (nedenleri ile belirterek) belirleyiniz! "tüm çözümlerini (genel çözüm ve varsa tekil çözümlerini) çözümün geçerli olduğu değişkenlerin tanım aralıklarını da vererek" bulunuz.*

1. $(xy^2 + \frac{1}{x})dx + (x^2 y - \ell ny)dy = 0$

2. $y' + y\cot x = \sin 2x$

3. $dy + (y - \sin x)\cos x\, dx = 0$

4. $(x\cos y - \sin^2 y)dy - \sin y\, dx = 0$

5. $x + y\ell ny = \frac{y}{y'}$

6. $(y - 5x)dx + (x - 5y)dy = 0$

7. $\frac{y'}{\cos^2 y} - \frac{1}{x}\tan y = 1$

8. $y' = -\frac{y}{x + \cos y}$

9. $(y - x + \frac{1}{x})dx + (x + y)dy = 0$

10. $(\frac{x\ell n(xy)}{x + y} - xy)\,dy + (\frac{y\ell n(xy)}{x + y} - xy)\,dx = 0$

Not: Çözümler-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
<u>kendi çözümlerinizle</u> mutlaka karşılaştırınız..

Çözümler…

(son güncelleme : 29.10.2014)

………………………

Önbilgi .1 *(Bazı Diferansiyeller)*

Tablo

	$du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \ \ , \ u = u(x,y)$
1	$d(xy) = y\,dx + x\,dy$
2	$d(x^2 \pm y^2) = 2\left(x\,dx \pm y\,dy\right)$
3	$d(\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$
4	$d(\arctan\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

………………………

....

Önbilgi .2 *(İntegrasyon Çarpan Araştırması)*

Tablo

$M\,dx + N\,dy = 0$ *Denk. için* μ *İntegrasyon Çarpanı Araştırması*

	Koşullar	integrasyon çarpanı	Açıklamalar
1	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$	$\mu = \mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}$	$\varphi(x)$ (yalnızca x-e bağlı) bir fonksiyon
2	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \varphi(y)$	$\mu = \mu(y) = e^{\int \varphi(y)\,dy}$	$\varphi(y)$ (yalnızca y-ye bağlı) bir fonksiyon
3	$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial w}{\partial x} - M\dfrac{\partial w}{\partial y}} = \varphi(w)$	$\mu = \mu(w) = e^{\int \varphi(w)\,dw}$	$w = w(x, y)$ (hem x-e hem y-ye bağlı), $\varphi(w)$ (yalnızca w-ya bağlı) bir fonksiyon

Not.

$$\left.\begin{array}{l}\text{1.durum: yalnızca } x\text{-e bağlı;}\\ \text{2.durum: yalnızca } y\text{-ye bağlı;}\\ \text{3.durum: hem } x\text{-e hem } y\text{-ye bağlı}\end{array}\right\}:$$

integrasyon çarpanı araştırmalarında kullanılacaktır!

....

A1. $(xe^y + x)dy + (e^y + ky)dx = 0$ için $M\,dx + N\,dy = 0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{l} M = e^y + ky \\ N = xe^y + x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^y + k \;,\; \frac{\partial N}{\partial x} = e^y + 1$$

Denklemin Tam Dif.Denk. olabilmesi için $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ şartı sağlanmalıdır:

$\Rightarrow\; e^y + k = e^y + 1 \;\Rightarrow\; k = 1$ bulunur.

Şimdi $(xe^y + x)dy + (e^y + y)dx = 0$

Tam Dif. Denk. in çözümünü bulalım:

<table>
<tr><td colspan="2">$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$</td></tr>
<tr><td>$$\begin{aligned} u &= \int M\,dx + f(y) \\ &= \int (e^y + y)dx + f(y) \\ &= xe^y + xy + f(y) \quad \ldots\text{(A1-i)} \end{aligned}$$</td><td>$$\begin{aligned} u &= \int N\,dy + g(x) \\ &= \int (xe^y + x)dy + g(x) \\ &= xe^y + xy + g(x) \quad \ldots\text{(A1-ii)} \end{aligned}$$</td></tr>
</table>

(A1-i) ve (A2-ii) den: $g(x) = 0$, $f(y) = 0$ bulunur. $\Rightarrow$ $u = xe^y + xy$ olur. Genel Çözüm $u = c$ idi.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Rightarrow \quad xe^y + xy = c & [\textbf{Genel Çözüm}] \\ I:\; -\infty < x < \infty & \end{array}}$$

A2. α yı belirlemek için iki yol izleyebiliriz:

I.yol: $\mu = \left(x^2+y^2\right)^\alpha$ yani $\mu = \mu(x^2+y^2)$ formunda bir integrasyon çarpanı araştırması ile.

II.yol: Denklemin her iki tarafını $\mu = \left(x^2+y^2\right)^\alpha$ ile çarpıp $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ eşitliğinden.

I.yoldan yapalım! (**İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem**)

$xdy - (x^2+y^2+y)dx = 0$ için $\bar{M}\,dx + \bar{N}\,dy = 0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} \bar{M} &= -x^2-y^2-y \\ \bar{N} &= x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = -2y-1 \neq 1 = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

$$w = x^2+y^2 \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 2y \end{aligned}\right.$$

Hem x-e hem y-ye bağlı integrasyon çarpanı, genel formda $w = w(x,y)$ için aşağıdaki şekilde araştırılıyor idi:

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{M}}{\partial y} - \dfrac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}\dfrac{\partial w}{\partial x} - \bar{M}\dfrac{\partial w}{\partial y}} = \frac{-2y-1-1}{x(2x)+(x^2+y^2+y)(2y)} = \frac{-2y-2}{2(x^2+y^2)+2y(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{-2y-2}{(x^2+y^2)(2y+2)} = -\frac{1}{(x^2+y^2)} = -\frac{1}{w} \qquad (y \neq -1)$$

yukarıdaki eşitlik sonucu, yalnızca w-ya bağlı bir fonksiyon elde edildi.

O halde Önbilgi2-Tablo: 3 den

$$\mu(w)=e^{\int \frac{\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}\frac{\partial w}{\partial x}-\bar{M}\frac{\partial w}{\partial y}}dw}=e^{-\int \frac{1}{w}dw}=e^{-\ell n w}=\frac{1}{w}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

……………..,,…….

II.yol: Denklemin

$$x\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}dy-(x^2+y^2+y)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}dx=0$$

$$\Rightarrow\ \tilde{M}=\left(-x^2-y^2-y\right)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}\ \ ,\ \ \tilde{N}=x\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}&=(-2y-1)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}+2\alpha y\left(-x^2-y^2-y\right)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}&=\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}+2\alpha x^2\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow\ \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ den her iki tarafı $\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}$ e bölelim

$$\Rightarrow\ (-2y-1)\left(x^2+y^2\right)+2\alpha y\left(-x^2-y^2-y\right)=x^2+y^2+2\alpha x^2$$

$$\Rightarrow\ -2(y+\alpha y+\alpha+1)x^2-2(y+\alpha y+\alpha+1)y^2=0$$

$$\Rightarrow\ y+\alpha y+\alpha+1=0\ \Rightarrow\ \alpha=-1$$

……………..,,…….

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ ($y\neq\pm x$) ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim.

$$\Rightarrow\ \frac{x}{x^2+y^2}dy-(1+\frac{y}{x^2+y^2})dx=0$$

Bu son denklem için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M &= -1-\frac{y}{x^2+y^2} \\ N &= \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

<table>
<tr><td colspan="2">$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$</td></tr>
<tr><td>$$u=\int M\,dx+f(y)$$ $$=-x-\underbrace{\int\frac{y}{x^2+y^2}dx}_{=I_1}+f(y)$$ $$=-x-\arctan\frac{x}{y}+f(y)\quad \ldots\text{(A2-i)}$$</td><td>$$u=\int N\,dy+g(x)$$ $$=\underbrace{\int\frac{x}{x^2+y^2}dy}_{=I_2}+g(x)$$ $$=-\arctan\frac{x}{y}+g(x)\quad\ldots\text{(A2-ii)}$$</td></tr>
</table>

I_1 için $I_1=-y\int\frac{1}{x^2+y^2}dx=\frac{y}{y}\int\frac{1}{(\frac{x}{y})^2+1}dx=-\arctan\frac{x}{y}+k_1$,

I_2 için benzer şekilde $I_2=\arctan\frac{y}{x}+k_2$ bulunur, "$\arctan k+\arctan\frac{1}{k}=\frac{\pi}{2}$" özelliğinden

$I_2=-(\arctan\frac{x}{y})+\underbrace{\frac{\pi}{2}+k_2}_{=k_3 \text{ diyelim}}=-(\arctan\frac{x}{y})+k_3$ yazılabilir.

(A2-i) ve (A2-ii) den: $g(x)=-x$, $f(y)=0$ bulunur.

$\Rightarrow$ $u=-x-\arctan\frac{x}{y}$ olur. Genel Çözüm $u=-c$ idi.

$$\boxed{\Rightarrow\quad x+\arctan\frac{x}{y}=c \qquad [\textbf{Genel Çözüm}] \qquad I:\ y\neq 0,\ y\neq\pm x}$$

$y=0$, $y\neq\pm x$ için çözüm araştırması:

$y=0$ denklemi sağlamaz dolayısıyla çözüm değildir. $y \neq \pm x$ denklemin çözümleridir. Genel çözüme dikkat edilirse, bu çözümler denklemin birer *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B1. (Tam Diferansiyel denklem)

$(xy^2+\frac{1}{x})dx+(x^2y-\ell ny)dy=0$ için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{l} M=xy^2+\dfrac{1}{x} \\ N=x^2y-\ell ny \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2xy=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$u=\int M\,dx+f(y)$ $=\int (xy^2+\frac{1}{x})dx+f(y)$ $=\frac{x^2y^2}{2}+\ell n\lvert x\rvert+f(y)$ ...(B1-i)	$u=\int N\,dy+g(x)$ $=\int (x^2y-\ell ny)dy+g(x)$ $=\frac{x^2y^2}{2}+\underbrace{\int \ell ny\,dy}_{=I_1}+g(x)$ $=\frac{x^2y^2}{2}-y\ell ny+y+g(x)$ ...(B1-ii)

(I_1 için kısmi integrasyon ile: $I_1=y\ell ny-y+k_1$ bulunur (*inceleyiniz*!).)

(A1-i) ve (A1-ii) den: $g(x)=\ell n\lvert x\rvert$, $f(y)=y-y\ell ny$ bulunur.

$\Rightarrow$ $u=\frac{x^2y^2}{2}+\ell n\lvert x\rvert+y-y\ell ny$ olur. Genel Çözüm $u=c$ idi.

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2y^2}{2}+\ell n\lvert x\rvert+y-y\ell ny=c \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$I:\ x\neq 0,\ y>0$

B2. (Lineer Diferansiyel denklem)

$y' + y\cot x = \sin 2x$, $y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow p(x) = \cot x$, $q(x) = \sin 2x$

I.yol: $y = uv$ *dönüşümü yaparak:*

$$\left.\begin{aligned} &y = uv\,,\ u = u(x)\,,\ v = v(x) \\ &y' + y\cot x = \sin 2x \\ &y' = u'v + uv' \end{aligned}\right\} \Rightarrow u'v + uv' + \cot x\, uv = v(\underbrace{u' + (\cot x)\, u}_{=0}) + uv' = \sin 2x$$

$$\Rightarrow u' + \cot x\, u = 0$$

$$\Rightarrow u = e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\int \cot x\,dx} = e^{-\ell n(\sin x)} = \frac{1}{\sin x}$$

(dikkat, integral sabiti 0 seçiliyor)

$$\Rightarrow uv' = \sin 2x \quad \Rightarrow v' = \sin x \sin 2x \quad \Rightarrow v = \underbrace{\int \sin x \sin 2x\, dx}_{=I_1}$$

I_1 integralini hesaplayalım:

$$I_1 = \int 2\sin^2 x \cos x\, dx$$

$$\Rightarrow \sin x = t \text{ dönüşümü uygulanırsa } \left(\Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dt\right):$$

$$I_1 = \int 2t^2\, dt = \frac{2t^3}{3} + c = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$

$\Rightarrow \quad v = \frac{2}{3}\sin^3 x + c \quad$ (v nin tespitinde: c integral sabitini eklemeyi UNUTMAYINIZ!)

$\Rightarrow$ genel çözüm: $y = uv$ den $y = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{2}{3}\sin^3 x + c\right)$

$$\underset{y=uv \text{ idi}}{\Rightarrow} \quad y = \frac{2}{3}\sin^2 x + \frac{c}{\sin x}$$

[**Genel Çözüm**]

$I: \quad x \neq n\pi \ , n = 0, \mp 1, \ldots$

II.yol: $v = e^{\int p(x)\,dx}$ *şeklinde integrasyon çarpanı bularak:*

$$v = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \cot x\,dx} = e^{\ell n(\sin x)} = \sin x \quad \text{bulunur.}$$

Şimdi denklemin her iki tarafını $v = \sin x$ ile çarpalım:

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sin x\, y' + \cos x\, y}_{=(vy)'=(\sin x\, y)' \text{ oldugu görülür!}} = \sin x \sin 2x$$

$$\Rightarrow \quad (\sin x\, y)' = \sin x \sin 2x$$

Şimdi son denklemin her iki tarafının integralini alalım:

$$\Rightarrow \quad \sin x\, y = \int \sin x \sin 2x\,dx \quad , \quad I_1 \text{ den}$$

$$\Rightarrow \quad \sin x\, y = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{2}{3}\sin^3 x + c\right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{y=uv \text{ idi}} \quad y = \frac{2}{3}\sin^2 x + \frac{c}{\sin x} \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$$I: \quad x \neq n\pi \ , n = 0, \mp 1, \ldots$$

B3. (İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem)

$dy + (y - \sin x)\cos x\,dx = 0$ için $\bar{M}\,dx + \bar{N}\,dy = 0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{M} = y\cos x - \sin x \cos x \\ \bar{N} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = \cos x \neq 0 = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

Ancak denklem, “integrasyon çarpanı “ ile Tam Dif. denklem haline getirilebilir mi? inceleyelim!

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}}=\frac{\cos x-0}{1}=\cos x$$

yalnızca x-e bağlı bir fonksiyon elde edildi. O halde Önbilgi2-Tablo:1 den

$$\mu(x)=e^{\int \frac{\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{\bar{N}}dx}=e^{\int \cos x\, dx}=e^{\sin x}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu(x)=e^{\sin x}$.

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu(x)=e^{\sin x}$ ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim.

$$\Rightarrow\; e^{\sin x}dy+(y-\sin x)\cos x\, e^{\sin x}\, dx=0$$

Bu son denklem için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{array}{c} M=(y-\sin x)\cos x\, e^{\sin x} \\ N=e^{\sin x} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\cos x\, e^{\sin x}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$u=\int M\,dx+f(y)$ $=\underbrace{\int (y-\sin x)\cos x\, e^{\sin x}\,dx}_{=I_1}+f(y)$ $=ye^{\sin x}+(-1+\sin x)e^{\sin x}+f(y) \quad \ldots$(B3-i)	$u=\int N\,dy+g(x)$ $=\int e^{\sin x}\,dy+g(x)$ $=ye^{\sin x}+g(x) \;\ldots$(B3-ii)

(I_1 için $\sin x=t$ dönüşünü yapılarak; $I_1=\int (y-t)e^t\,dt=y\int e^t\,dt+\underbrace{\int te^t\,dt}_{kısmi\ integrasyon}$

şeklinde bulunur (*inceleyiniz*!).)

(B3-i) ve (B3-ii) den: $g(x)=(-1+\sin x)e^{\sin x}$, $f(y)=0$ bulunur.

$\Rightarrow\ u=ye^{\sin x}+(-1+\sin x)e^{\sin x}=(y-1+\sin x)e^{\sin x}$ olur. Genel Çözüm $u=c$ idi.

$$\boxed{\Rightarrow \quad (y-1+\sin x)e^{\sin x}=c \qquad [\textbf{Genel Çözüm}] \qquad I:\ -\infty<x<\infty}$$

B4. **(**İntegrasyon Çarpanı ile Tam Diferansiyel hale getirilebilen denklem**)**

$(x\cos y-\sin^2 y)dy-\sin y\,dx=0$ için $\bar{M}\,dx+\bar{N}\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}&=-\sin y\\ \bar{N}&=x\cos y-\sin^2 y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \bar{M}}{\partial y}=-\cos y\neq\cos y=\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif. DEĞİL!

Ancak denklem, “integrasyon çarpanı “ ile Tam Dif. denklem haline getirilebilir mi? inceleyelim!

$$\frac{\dfrac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{-\bar{M}}=\frac{-\cos y-\cos y}{\sin y}=-\frac{2\cos y}{\sin y}=-2\cot y$$

yalnızca y-ye bağlı bir fonksiyon elde edildi. O halde Önbilgi2-Tablo:2 den

$$\mu(y)=e^{\int \frac{\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}-\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}}{-\bar{M}}dy}=e^{-\int 2\cot y\, dy}=e^{-2\ell n(\sin y)}=\frac{1}{\sin^2 y}$$

$\Rightarrow$ intergrasyon çarpanı: $\mu(y)=\dfrac{1}{\sin^2 y}$.

Şimdi denklemin her iki tarafını $\mu(y)$ ile çarpalım ve denklemin Tam Dif. Denk. haline geldiğini kontrol edip, çözelim:

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1\right)dy-\frac{1}{\sin y}dx=0 \qquad (\sin y\neq 0)$$

Bu son denklem için $M\,dx+N\,dy=0$ yazımından:

$$\left.\begin{aligned} M&=-\frac{1}{\sin y}\\ N&=\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\cos y}{\sin^2 y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Denklem: Tam Dif.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$u=\int M\,dx+f(y)$ $=-\int \frac{1}{\sin y}dx+f(y)$ $=-\frac{x}{\sin y}+f(y)\quad\ldots$(B4-i)	$u=\int N\,dy+g(x)$ $=\int (\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-1)dy+g(x)$ $=-y+x\underbrace{\int \frac{\cos y}{\sin^2 y}dy}_{=I_1}+g(x)$ $=-y-\frac{x}{\sin y}+g(x)\ldots$(B4-ii)

(I_1 için $\sin y=t$ dönüşünü yapılarak; sonuçta $I_1=-\frac{1}{\sin y}+k_1$ bulunur (*inceleyiniz*!).)

(B4-i) ve (B4-ii) den: $g(x)=0$, $f(y)=-y$ bulunur.

$\Rightarrow\ u=-y-\frac{x}{\sin y}$ olur. Genel Çözüm $u=-c$ idi.

$$\boxed{\Rightarrow\quad y+\frac{x}{\sin y}=c \qquad [\text{Genel Çözüm}] \qquad I:\ \ y\neq n\pi\ ,n=0,\mp1,\ldots}$$

$y=n\pi$ için çözüm araştırması:

Denklemi sağlar (*gözlemleyiniz!*) dolayısıyla denklemin bir çözümüdür. Genel çözüme dikkat edilirse, *Tekil-Çözümü* olduğu görülür (*gözlemleyiniz!*).

B5. (***x*-**e göre Lineer Diferansiyel denklem**)**

$$x+y\ell ny=\frac{y}{y'}$$

$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=\ell ny$	$\frac{dx}{dy}+p(y)x=q(y)\ \Rightarrow\ p(y)=-\frac{1}{y},\ q(y)=\ell ny$

integrasyon çarpanı bulma metodu ile çözelim:

$$v = e^{\int p(y)\,dy} = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ell n y} = \frac{1}{y} \quad \text{bulunur.}$$

Şimdi lineer denklemin her iki tarafını $v = \frac{1}{y}$ ile çarpalım: $\left(x' = \frac{dx}{dy}\right)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{y}x' - \frac{1}{y^2}x}_{=(vx)'=\left(\frac{1}{y}x\right)' \text{ oldugu görülür!}} = \frac{\ell n y}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{y}x\right)' = \frac{\ell n y}{y}$$

Şimdi son denklemin her iki tarafının integralini alalım:

$$\frac{1}{y}x = \underbrace{\int \frac{1}{y}\ell n y\,dy}_{=I_1}$$

I_1 hesaplanırsa: $I_1 = \frac{1}{2}\ell n^2 y + \frac{1}{2}c$ bulunur (*inceleyip, ara işlemleri yapınız*!).

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}x = \frac{1}{2}\ell n^2 y + c$$

$$\Rightarrow \quad x = y\left(\frac{1}{2}\ell n^2 y + c\right) \qquad \text{[Genel Çözüm]}$$

$I:\ y > 0$

B6.

I. yol : Homojen denklemden çözüm bulunabilir!

II.yol : B1 deki yapılanlara benzer şekilde Tam Dif. denklemden çözüm bulunabilir!

III.yol : Gruplandırma: Önbilgi1-Tablo: 1 ve 2 den yararlanarak

$$(y-5x)dx+(x-5y)dy=0 \;\Rightarrow\; \underbrace{ydx+xdy}_{=d(xy)}-5(\underbrace{xdx+ydy}_{=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)})=0$$

$$\Rightarrow\; d(xy)-\frac{5}{2}d(x^2+y^2)=0 \;\Rightarrow\; d(xy-\frac{5}{2}(x^2+y^2))=0$$

$$\boxed{\Rightarrow\; xy-\frac{5}{2}(x^2+y^2)=c \qquad [\text{Genel Çözüm}] \qquad I:\; -\infty<x<\infty}$$

B7. **(**Özel formda Lineer Denklem haline getirilebilen**)**

Bu denklem, aşağıdaki dönüşüm ile lineer hale daha getirilebilir:

$$\frac{1}{\cos^2 y}y'-\frac{1}{x}\tan y=1$$

$\tan y=z$, $z=z(x)$

$$\underbrace{\left(1+\tan^2 y\right)}_{=\frac{1}{\cos^2 y}}y'=z'$$

$\Rightarrow\; z'-\dfrac{1}{x}z=1$ (lineer denklem) elde edilir.

$y'+p(x)y=q(x)$

$\Rightarrow\; p(x)=-\dfrac{1}{x}$, $q(x)=1$

Şimdi lineer denklemi, $z=uv$ dönüşümü ile çözelim :

$z=uv$, $u=u(x)$, $v=v(x)$

$$z'-\frac{1}{x}z=1$$

$$z'=u'v+uv'$$

$$\Rightarrow\; u'v+uv'-\frac{1}{x}uv=v(\underbrace{u'-\frac{1}{x}u}_{=0})+uv'=1$$

$$\Rightarrow\; u'-\frac{1}{x}u=0$$

$$\Rightarrow\; u=e^{-\int p(x)\,dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ell nx}=x$$

(dikkat, integral sabiti 0 seçiliyor)

$$\Rightarrow \quad uv' = 1 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad v = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$\Rightarrow \quad v = \ell n\left|x\right| + c$ (v nin tespitinde: c integral sabitini eklemeyi UNUTMAYINIZ!)

$\Rightarrow$ genel çözüm: $z = uv$ den $z = x\left(\ell n\left|x\right| + c\right)$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{z=\tan y \text{ idi}} \quad \tan y = x\left(\ell n\left|x\right| + c\right) \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$I: \; x \neq 0 \;, y \neq (2n-1)\pi/2 \;, n = 0, \mp 1, \ldots$

$y = (2n-1)\pi/2$ için çözüm araştırması: diferansiyel denklemi sağlamadığı için çözüm değildir.

B8. Gruplandırma: Önbilgi1-Tablo: 1 den yararlanarak

$$y' = -\frac{y}{x + \cos y} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ydx + xdy}_{=d(xy)} + 5\cos y\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int d(xy) = -\int \cos y\,dy$$

$$\Rightarrow \quad xy = -\sin y + c \qquad [\text{Genel Çözüm}]$$

$I: \; y \neq \arccos(-x)$

B9.

I. yol : B1 deki yapılanlara benzer şekilde Tam Dif. denklemden çözüm bulunabilir!

II.yol : Gruplandırma: Önbilgi1-Tablo: 1 ve 2 den yararlanarak

$$(y - x + \frac{1}{x})dx + (x+y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{ydx + xdy}_{=d(xy)} + (\underbrace{-xdx + ydy}_{=-\frac{1}{2}d(x^2-y^2)}) + \underbrace{\frac{1}{x}dx}_{=d(\ell n|x|)} = 0$$

$$\Rightarrow\ d(xy)-\frac{1}{2}d(x^2-y^2)+d(\ell nx)=0 \quad \Rightarrow\ d\left(xy-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\ell n\left|x\right|\right)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Rightarrow \quad xy-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\ell n\left|x\right|=c \qquad [\text{Genel Çözüm}] \\ \\ I:\ x\neq 0\end{array}}$$

B10. Gruplandırma:

$$\left(\frac{x\ell n(xy)}{x+y}-xy\right)dy+\left(\frac{y\ell n(xy)}{x+y}-xy\right)dx=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\ell n(xy)}{x+y}\left[xdy+ydx\right]=xydx+xydy$$

$$\Rightarrow\ \frac{\ell n(xy)}{x+y}\underbrace{\left[xdy+ydx\right]}_{=d(xy)}=xy\underbrace{\left[dx+dy\right]}_{=d(x+y)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\ell n(xy)}{xy}d(xy)=(x+y)d(x+y)$$

şimdi her iki tarafın integrali alınırsa, $\int \frac{\ell nu}{u}du=\frac{\ell n^2 u}{2}+k_1$ (*inceleyip, ara işlemleri yapınız!*) ve $\int wdw=\frac{w^2}{2}+k_2$ bilgilerinden; $\frac{\ell n^2(xy)}{2}=\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{c}{2}$ bulunur.

$$\boxed{\begin{array}{l}\Rightarrow \quad \ell n^2(xy)=(x+y)^2+c \qquad [\text{Genel Çözüm}] \\ \\ I:\ y\neq -x\ ,\ xy>0\end{array}}$$

SORU 1. (**00p**) Aşağıdaki **1** ve **1′** sorularından yalnızca **bir tanesini seçerek** çözünüz!

1. ….

1′. ….

SORU 2. (**00p**) Aşağıdaki **2** ve **2′** sorularından yalnızca **bir tanesini seçerek** çözünüz!

2. ….

2′. ….

SORU 3. (**00p**) ….

SORU 4. (**00p**) Aşağıdaki şıklardan yalnızca **iki tanesini seçerek** yapınız!

(A) ….

(B) ….

(C) ….