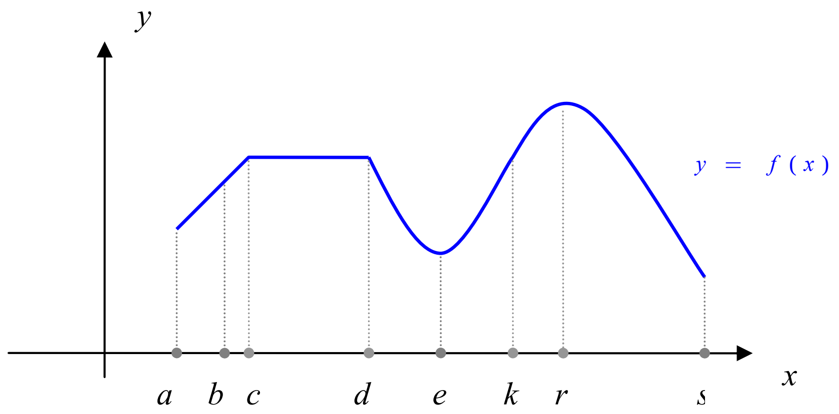
Analiz II
Çalışma Soruları-3

Son güncelleme: 14.04.2011

(I) (A) *Aşağıdaki fonksiyon için verilen noktaların ektremum nokta olup olmadıklarının gözlemini yapınız.*



(B) *Aşağıdaki fonksiyonların varsa ekstremum noktalarını bulunuz.*

1. $f(x) = 2x+1$

2. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

3. $f(x) = x^3 - 27x + 10$

4. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

5. $f(x) = 2x^2 - 5x + x\ell nx$

6. $f(x) = x\ell nx$

(C) *Aşağıdaki fonksiyonların ekstremum noktalarını araştırarak verilen aralıklarda varsa maksimum-minimum değerlerini bulunuz.*

1. $f(x) = e^x \ ,\ [0,1]$

2. $f(x) = \sqrt{1-x} \ ,\ [-1,1]$

3. $f(x) = \begin{cases} 1-x & ,0 \le x < 1 \\ 2x-4 & ,2 \le x \le 3 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,-1 \le x < 0 \\ 2-x^2 & ,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \ ,\ [-1,4]$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \ ,\ [0,2]$

http://odev.110mb.com

(II) *Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

1. $f(x) = x^4 - 8x^2$

2. $f(x) = x^4 - 6x^2$

3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$

4. $f(x) = x^2 - x + 12$

5. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

6. $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

7. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

http://odev.110mb.com

Not: Yanıtlar-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..

Çalışma Soruları-3 ***(son güncelleme : 14.04.2011)***

Yanıtlar - Yol Göstermeler I

Önbilgi 1. $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $x_0 \in D$ noktası, $U : x_0$ ın bir civarı $(U \subseteq D)$ verilsin. EN: Yerel Ekstremum (maksimum-minimum) nokta, KN: Kritik nokta, y: Yerel, m:Mutlak.

x_0 y.minimum : "$\forall x \in U$ için $f(x) \geq f(x_0)$"

x_0 y.maksimum : "$\forall x \in U$ için $f(x) \leq f(x_0)$"

Not 1: Yukarıdaki tanımlarda U yerine D alınırsa sırasıyla m.minimum-m.maksimum tanımları elde edilir. Başka ifade ile m.maksimum (m.minimum): y.maksimum noktalarının en büyüğü(en küçüğü)dür.

(KN.ların tespiti) KN.lar: $f'(x_0) = 0$ şeklindeki x_0 noktaları.

(EN için bir gerek koşul) x_0 EN $\Rightarrow x_0$ KN.

Not 2: Bu sonuç türevin varlığı hipotezi altında geçerlidir. O halde x_0 da türev var ve x_0 KN değil ise x_0 EN değildir.

(KN.larda EN araştırması) x_0 KN olsun.

(i) ***(Birinci Türevin işaretinin incelenmesi)***

x	x_0	
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

y.maksimum

x	x_0	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

y.minimum

Not 3: Diğer durumlarda x_0 EN değildir diyebiliriz.

(ii) *(İkinci Türev Testi) (EN için bir yeter koşul)*

$$\text{“}f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ y.minimum”} \;,\; \text{“}f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ y.maksimum”}.$$

***Not 4**: Bu sonuç ikinci türevin varlığı hipotezi altında geçerlidir. Testin sonuç vermediği durumlar için x_0 EN değildir diyemeyiz.*

A. c, d, r : y.maksimum; r : m.maksimum; e : y.minimum; s : m.minimum;
a, b, k : EN değil.

B1. $f(x) = 2x+1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 \;\Rightarrow\;$ KN yok $\underbrace{\Rightarrow}_{\textbf{Not 2 den}}$ EN yok !

B2. $f(x) = x^2 - 4x + 6 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x - 4$, **KN :** $\left\{ \begin{array}{c} f'(x) = 2x-4 = 0 \\ \Downarrow \\ x = 2 \end{array} \right.$

x		2	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

y.minimum

B3. $f(x) = x^3 - 27x + 10 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 27$, **KN :** $\left\{ \begin{array}{c} f'(x) = 3(x-3)(x+3) = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = -3,\; x_2 = 3 \end{array} \right.$

x		-3		3	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

y.maksimum **y.minimum**

B4. $f(x)=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, **KN :** $\left\{ \begin{array}{c} f'(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0 \\ \Downarrow \\ x_1=-1,\ x_2=1 \end{array} \right.$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

y.maksimum y.minimum

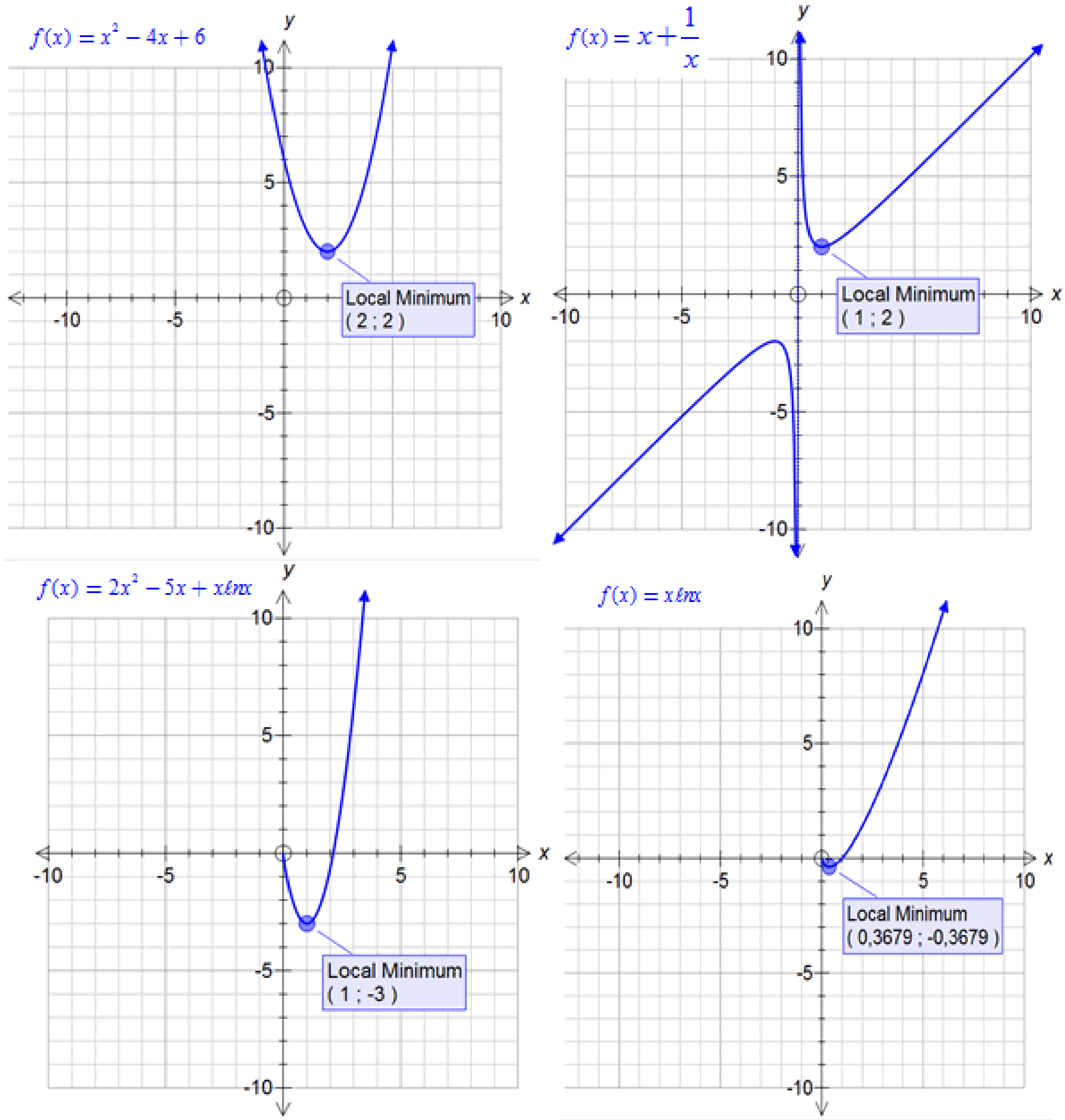
B5. $f(x)=2x^2-5x+x\ell nx \Rightarrow f'(x)=4x-4+\ell nx$, **KN :** $\left\{ \begin{array}{c} f'(x)=4x-4+\ell nx=0 \\ \Downarrow \\ x=1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow f''(x)=4+\dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(1)=5>0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ikinci türev testinden}} x=1$ y.minimum.

B6. $f(x)=x\ell nx \Rightarrow f'(x)=1+\ell nx$, **KN :** $\left\{ \begin{array}{c} f'(x)=1+\ell nx=0 \Rightarrow \ell nx=-1 \\ \Downarrow \\ x=\dfrac{1}{e} \end{array} \right.$

$\Rightarrow f''(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(\dfrac{1}{e})=e>0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ikinci türev testinden}} x=\dfrac{1}{e}$ y.minimum.

Grafikler (gözlem için):



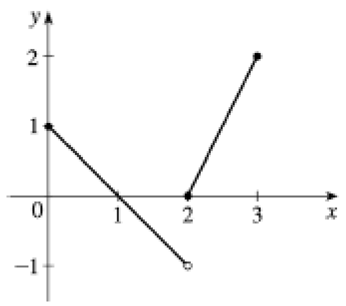
C1. $f(x) = e^x$, $[0,1]$ $\Rightarrow f'(x) = e^x$ $\Rightarrow$ KN yok $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Not 2 den}}$ Aralığın iç noktalarında EN yok !. Uç noktaları inceleyelim: $f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow f$ Artan $\Rightarrow$ $x = 0$ m.minimum, $x = 1$ m.maksimum $\Rightarrow$ Minimum değer: $f(0) = 1$, Maksimum değer: $f(1) = e$.

C2. $f(x) = \sqrt{1-x}$, $[-1, 1] \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$ $\Rightarrow$ KN yok $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Not 2 den}}$ Aralığın iç noktalarında EN yok !. Uç noktaları inceleyelim:

$f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \ \Rightarrow \ f$ Azalan $\Rightarrow \ x = 1$ m.minimum, $x = -1$ m.maksimum $\Rightarrow$

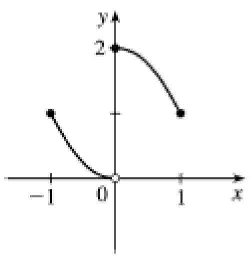
Minimum değer: $f(1) = 0$, Maksimum değer: $f(-1) = 2$.

C3. $f(x) = \begin{cases} 1-x & ,0 \le x < 1 \\ 2x-4 & ,2 \le x \le 3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Dikkat edilirse fonksiyon $x = 2$ de sürekli değildir dolayısıyla bu noktada türevlenemez. Fonksiyonun grafiği üzerinde inceleme yapıp sonuca gidelim:



$x = 2$ EN değil. Aralığın iç noktalarında EN yok. $x = 3$ m.maksimum $\Rightarrow$ Maksimum değer: $f(3) = 2$.

C4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,-1 \le x < 0 \\ 2-x^2 & ,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Dikkat edilirse fonksiyon $x = 0$ da sürekli değildir dolayısıyla bu noktada türevlenemez. Fonksiyonun grafiği üzerinde inceleme yapıp sonuca gidelim:



$x = 0$ y.maksimum ve m.maksimum. Aralığın diğer iç noktalarında EN yok. $f(-1) = f(1) = 1$ $\Rightarrow$ Maksimum değer: $f(0) = 2$.

C5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \ , \ [-1, 4]$, **KN :** $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0 \\ \Downarrow \\ x_1 = 1, \ x_2 = 3 \end{cases}$

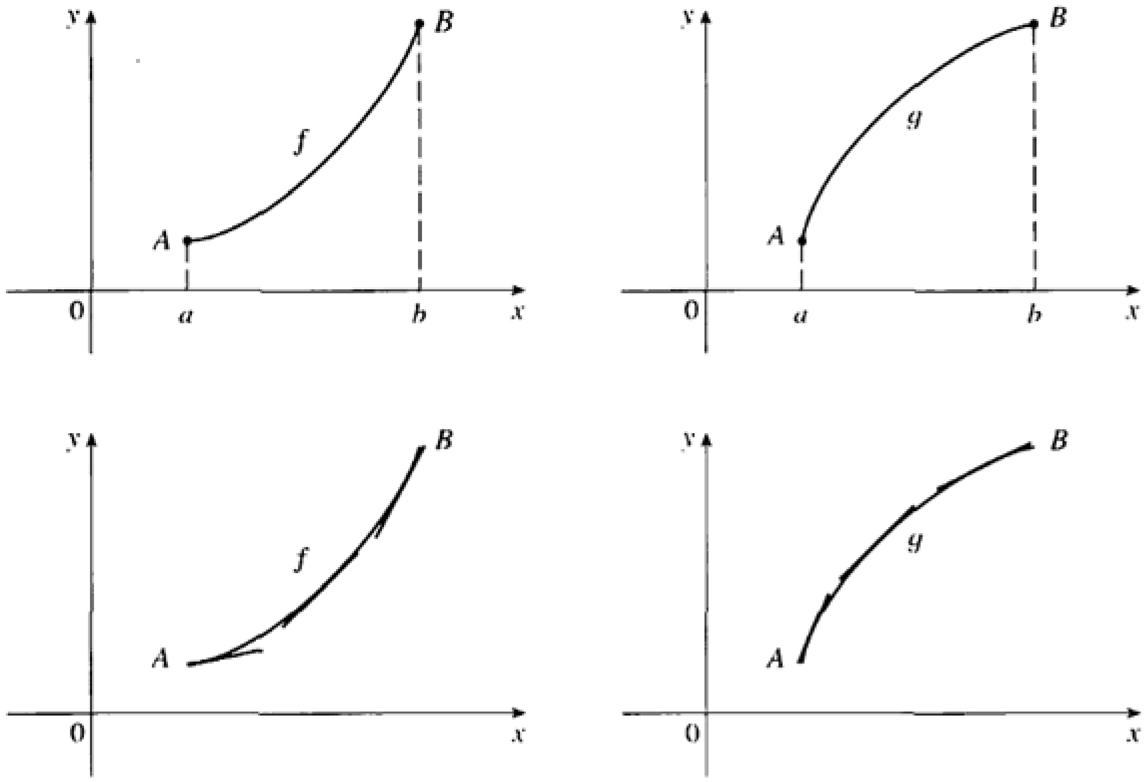
$\Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0 \ \underbrace{\Rightarrow}_{\textbf{ikinci türev testinden}} \ x = 1$ y.minimum,

$f''(3) = 6 > 0 \ \underbrace{\Rightarrow}_{\textbf{ikinci türev testinden}} \ x = 3$ y.minimum.

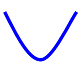
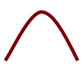
$f(-1)=-14$, $f(1)=f(4)=6$, $f(3)=2$ $\Rightarrow$ Minimum değer: $f(-1)=-14$, Maksimum değer: $f(1)=f(4)=6$.

C6. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $[0,2]$. Cevabı: Minimum değer: $f(0)=0$, Maksimum değer: $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

***Önbilgi 2* (i) (*konvekslik-konkavlık*)** Şekil üzerinde açıklayacağız.



$\underbrace{\text{bütün teğetler } f \text{ in grafiğinin altında}}_{\text{konveks}}$ $\underbrace{\text{bütün teğetler } g \text{ nin grafiğinin üzerinde}}_{\text{konkav}}$

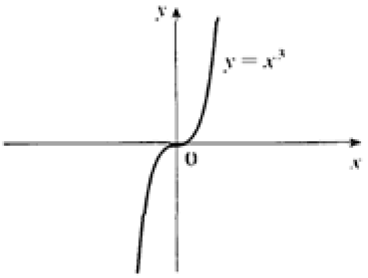
Not 5: (kabaca) Konveks:  , Konkav: 

(ii) *(f'' ile f in grafiği arasındaki ilişki) (Konvekslik Testi)*

(ii) -T1. "$\forall x \in I$ için $f''(x) > 0$" $\Rightarrow$ $f: I$ da konveks.

(ii) -T2. "$\forall x \in I$ için $f''(x) < 0$" $\Rightarrow$ $f: I$ da konkav.

(iii) ***(Büküm noktası)*** Eğrinin konvekslikten konkavlığa (veya konkavlıktan konveksliğe) geçtiği noktaya Büküm (Dönüm-Eğer) noktası denilir. Ör:



$x = 0$ noktası büküm noktasıdır.

(iii) ***(Asimptotlar:*** *fonksiyona sonsuzda teğet olan eğriler* ***)*** Daha çok $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ şeklindeki rasyonel ifadelerde rastlanılır (*p,q*: polinom). *Sorulara uygunluk açısından kabaca açıklama:*

(Düşey Asimptot: *paydayı sıfır yapan değerlerde* ***)*** $f(a-)$, $f(a+)$ değerlerinden biri $-\infty$ diğeri $+\infty$ a eşit $\Rightarrow$ $x = a$ f in bir D.Asimptotudur.

(Yatay Asimptot: $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ *için limitlerde)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y = b$ f in bir Y.Asimptotudur.

(Eğri Asimptot: *payın derecesi paydanınkinden bir büyük)*

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right) = n \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y = mx + n$ f in bir E.Asimptotudur.

Örnekler: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ fonksiyonu için $x = 1$ D.Asimptot, $y = 0$ Y.Asimptottur.

$f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$ fonksiyonu için $y = x + 2$ E.Asimptottur.

(II) *Fonksiyon grafiklerinin çizimi ile ilgili sorularda, aşağıdaki aşamaları takip edeceğiz:*

A. Fonksiyonun tanım kümesinin ve eksenleri kestiği noktaların belirlenmesi.
B. Asimptotların belirlenmesi.
C. Birinci ve İkinci türevlerin, EN.ların, Konveks-Konkav olduğu bölgelerin belirlenmesi.

http://odev.110mb.com

1. $f(x)=x^4-8x^2$

A. $\left.\begin{array}{l} y=x^4-8x^2=x^2(x^2-8) \\ x=0 \text{ için } y=0 \\ y=0 \text{ için } x=-\sqrt{8}, x=\sqrt{8} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0),\ \left(-\sqrt{8},0\right),\ \left(\sqrt{8},0\right);$ T.K: $\mathbb{R}$

B. Asimptot yok!

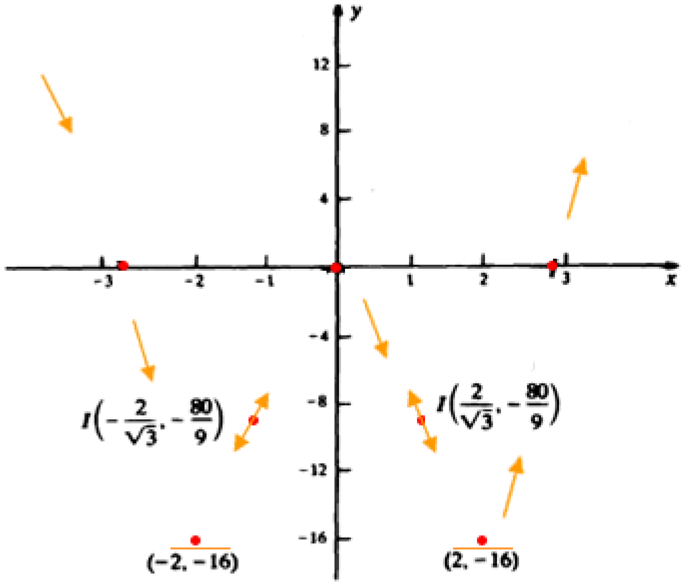
C. $f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$,

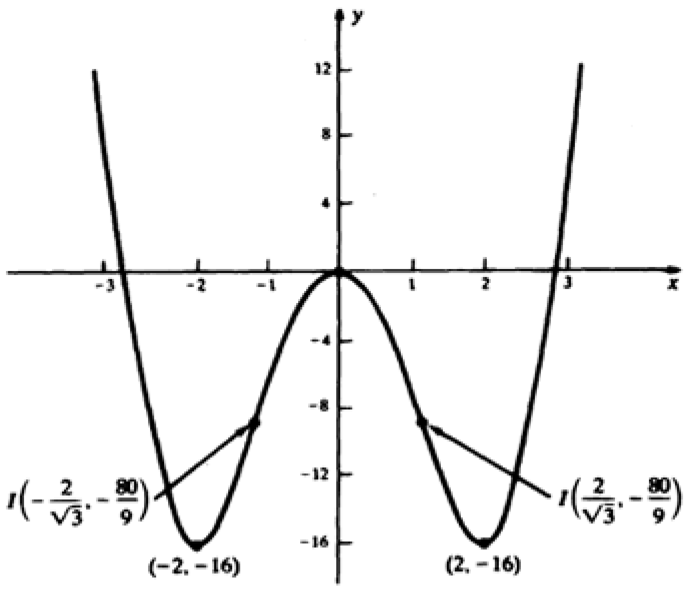
$f''(x)=12x^2-16=4(3x^2-4)=12(x-\frac{2}{\sqrt{3}})\,(x+\frac{2}{\sqrt{3}})$

x	$-\infty$	-2	0	2	∞
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	∞ ↘	↗	↘	↗ ∞	
		-16 y.minimum	0 y.maksimum	-16 y.minimum	

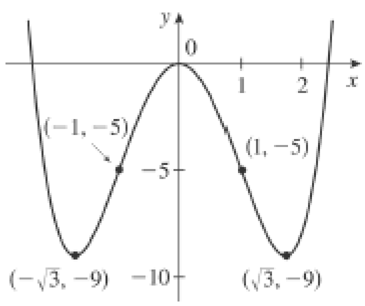
x		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
Konvekslik	konveks ∪		konkav ∩		konveks ∪
		$-\frac{80}{9}$ büküm n.		$-\frac{80}{9}$ büküm n.	

Çizime Hazırlık





2. $f(x) = x^4 - 6x^2$ benzer şekilde:



3. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

A. $\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{x^2+3} \\ x=0 \text{ için } y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\text{; T.K: } \mathbb{R}$

B. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+3}=1 \;\Rightarrow\; y=1$ Y.Asimptot

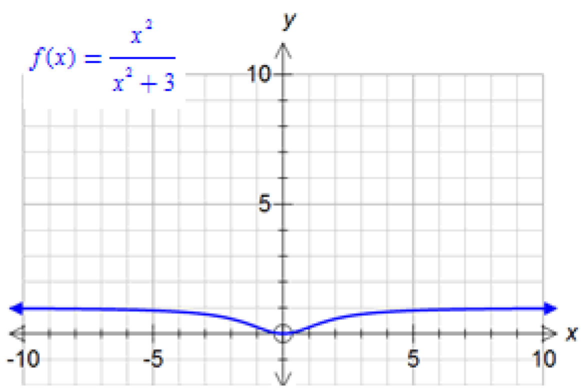
C. $f'(x)=\dfrac{6x}{\left(x^2+3\right)^2}$, $f''(x)=-\dfrac{18(x+1)(x-1)}{\left(x^2+3\right)^3}$

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\infty \searrow$	0	$\nearrow \infty$

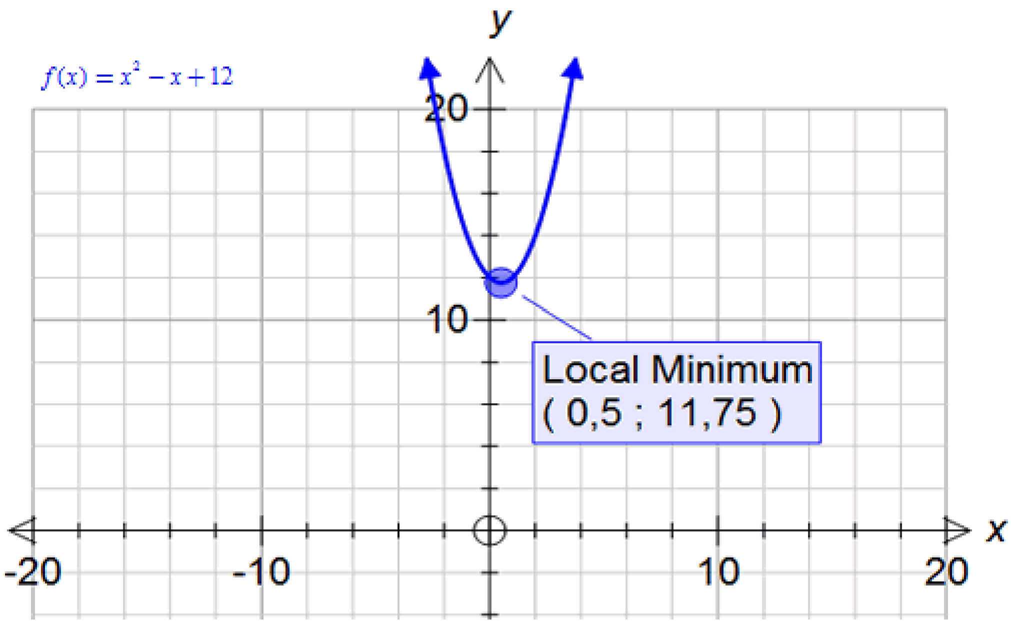
0
y.minimum

x		-1		1	
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$
Konvekslik	konkav		konveks		konkav

$\frac{1}{4}$ **büküm n.** $\frac{1}{4}$ **büküm n.**



4. $f(x)=x^2-x+12$ benzer şekilde:



5. $f(x)=x-\frac{1}{x}$

A. $\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2-1}{x^2} \\ x=0 \text{ için } x=-1, x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,0),\ (1,0);$ T.K: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

B. $\left.\begin{array}{l} f(0-)=\lim\limits_{x\to 0-} x-\dfrac{1}{x}=\infty \\ f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+} x-\dfrac{1}{x}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=0$ D.Asimptot

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=1, \\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}-x\right) \\ =\lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{1}{x}=0\ (=n) \end{array}\right\} \Rightarrow y=mx+n \text{ yani } y=x \text{ E.Asimptot}$$

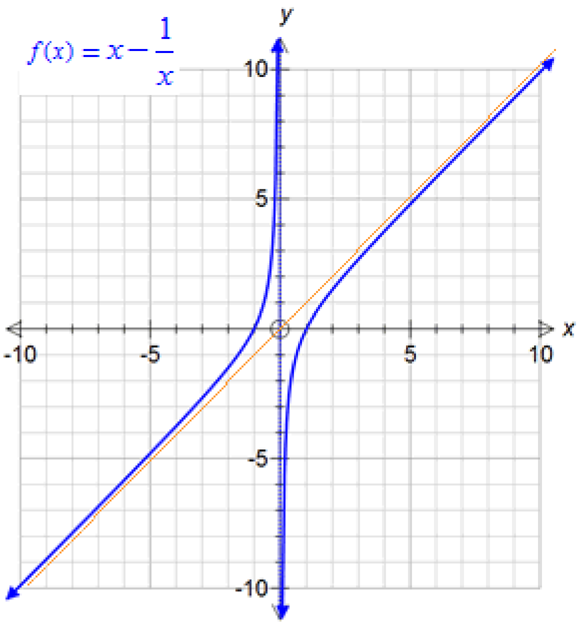
C. $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=-\frac{2}{x^3}$

KN yok $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Not 2 den}}$ EN yok !

x	$-\infty$			∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		∞

x	0	
$f''(x)$	$+$	$-$
Konvekslik	konveks	konkav

b ü k ü m n .



6. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

A. $$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{x-1} \\ x = 0 \text{ için } y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,0),\ (1,0);\ \text{T.K: } \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

B. $$\left.\begin{array}{l} f(1-) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty \\ f(1+) = \lim\limits_{x\to 1+} x - \dfrac{1}{x} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \text{ D.Asimptot}$$

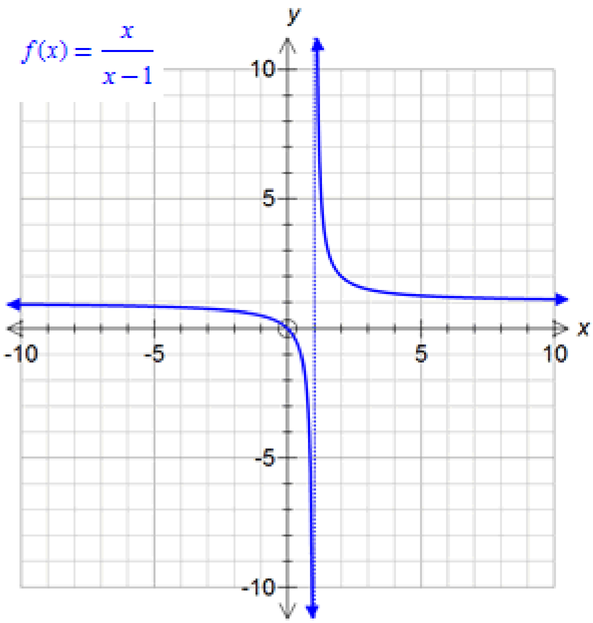
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 1 \;\Rightarrow\; y=1 \text{ Y.Asimptot}$$

C. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$, KN yok $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Not 2 den}}$ EN yok !

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$		$\infty \searrow 1$

x		1	
$f''(x)$	$-$		$+$
Konvekslik	konkav $\frown$		konveks $\smile$

b ü k ü m n .



7. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ benzer şekilde ($x=-1, x=1$ D.Asimptot; $y=1$ Y.Asimptot; $x=0$ y.maksimum):