Analiz II
Çalışma Soruları-2

Son güncelleme: 04.04.2011

(I) *Aşağıdaki fonksiyonların (ilgili değişkenlere göre) türevlerini bulunuz.*

1. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

2. $\ell n^2\left(\sqrt{\sin x}\right)$

3. $e^{2\tan\sqrt{x}}$

4. $\sqrt{x-\sqrt{1+\cot\sqrt{x}}}$

5. $\sin(e^t)+e^{\sin t}$

6. $\cos(\tan x^2)$

7. $2^{\cos\pi x}$

8. $\log_2(\sin\pi x)$

9. $3^{2^{\sqrt{x}}}$

10. $\sec x$

11. $\arccos^3(\sqrt{e^x})$

(II) (A) *(Bileşke fonksiyonun türevi)*

1. $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\cos x \ \Rightarrow\ \left(f\circ g\right)'(x)=?\,,\ \left(g\circ f\right)'(\dfrac{2}{\pi})=?$

2. $f(x)=x^2,\ g(x)=\ell nx,\ h(x)=\sqrt{x}\,,\ k(x)=\sin x \ \Rightarrow\ \left(f\circ g\circ h\circ k\right)'(x)=?\,,$

$\left(h\circ g\right)'(e)=?$

(B) *Aşağıda verilen f fonksiyonları için (türevlerin varlıklarının varsayımı altında) f' leri, g' cinsinden ifade ediniz.*

1. $f(x)=e^x g(x)$

2. $f(x)=g\left(g(x)\right)$

3. $f(x)=g(x^3)$

4. $f(x)=\left(g(x)\right)^3+e^{g(x)}$

(C) *Aşağıda verilen h fonksiyonları için (türevlerin varlıklarının varsayımı altında)* h' leri, f' ve g' cinsinden ifade ediniz.

1. $h(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)}$

2. $h(x)=f\left(g(\sin x)\right)$

3. $h(x)=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

4. $h(x)=f\left(\sqrt{\dfrac{1}{g(x)}}\right)$

(D) *(Zincir kuralı, Parametreye bağlı fonksiyonlarda türev)*

1. $$\left.\begin{array}{l} y=1+\ell n(x^2+1) \\ x=e^{\theta}+\theta \\ z=\cos^2\theta \\ \theta=\arcsin t \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{dy}{d\theta}(0)=?\ ,\ \frac{dy}{dt}=?\,,\ \frac{dz}{dx}=?\,,\ \frac{d^2z}{dx^2}=?$$

2. $$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{1-t} \\ y=\sqrt{1-\sqrt{t}} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \frac{dy}{dx}=?$$

(III) *Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.*

1. $\left(\sqrt{x}\right)^x$

2. $x^{\cos x}$

3. 2^{x^x}

4. $x^{(\ell nx)^x}$

(IV) (A) *Aşağıdaki fonksiyonların n. mertebeden türevlerini bulunuz.*

1. $\sqrt{x}$

2. $\cos x$

3. $\ell n(x-1)$

4. xe^x

5. e^{-kx} (k sabit)

6. $\sin 2x$

http://odev.110mb.com

(B) *Leibniz Çarpım Kuralından yararlanarak* $h(x)=e^{-x}x^2$ *fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulunuz.*

(V) (A) *Aşağıdaki fonksiyonlara* $[0,2]$ *aralığında Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir mi? inceleyiniz, uygulanabilirse Teoremde sözü geçen sabiti bulunuz.*

1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\leq 1 \\ 2x & ,x>1 \end{cases}$

2. $g(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\leq 1 \\ x & ,x>1 \end{cases}$

3. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & ,x\neq 2 \\ x & ,x=2 \end{cases}$

4. $h(x)=x^3-x$

5. $\phi(x)=2e^{-x}$

6. $\gamma(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

(B) *Aşağıdaki iddiaların doğru olduklarını gösteriniz (Ortalama Değer Teoreminden yararlanarak)*

1. $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ için $\tan x > x$

2. $\forall a,b\in\mathbb{R}$ için $|\sin a-\sin b| \leq |a-b|$

3. $\forall x>0$ için $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$

4. $\forall x>0$ için $\ell n(1+x) \leq x$.

(C) *"* $f(0)=g(0)$ *" ve "* $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)\le g'(x)$ *" koşullarını sağlayan türevlenebilen* f *ve* g *fonksiyonları verilsin. Bu durumda (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoreminden yararlanarak) "* $\forall x\ge 0$ için $f(x)\le g(x)$ *" olacağını gösteriniz.*

(D) *Aşağıdaki fonksiyonlara verilen aralıklarda Rolle Teoremi uygulanabilir mi? inceleyiniz, uygulanabilirse Teoremde sözü geçen sabiti bulunuz.*

1. $f(x)=x^{\frac{2}{3}}+1$, $[-1,1]$
2. $f(x)=x\sqrt{x+3}$, $[-3,0]$
3. $f(x)=\sin 2\pi x$, $[-1,1]$

(E) $4x^3-16x+7=0$ *denkleminin* $(0,1)$ *aralığında bir kökünün var olduğunu Rolle Teoreminden yararlanarak gösteriniz.*

(F) *Aşağıdaki fonksiyonların türevlerinden yararlanarak, Artan-Azalan oldukları aralıkları belirleyiniz.*

1. $f(x)=2x+1$
2. $f(x)=-x+2$
3. $f(x)=x^2-4x+6$
4. $f(x)=x^3-27x+10$
5. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
6. $f(x)=x-2\sin x$, $(0,3\pi)$ de

Not: Yanıtlar-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir..
kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..

Çalışma Soruları-2 ***(son güncelleme : 04.04.2011)***

Yanıtlar - Yol Göstermeler I

1. $$\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2\right)' = 2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\underbrace{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'}_{=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}} = 2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right).$$

2. $$\left(\ell n^2\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)' = 2\left(\ell n\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)\underbrace{\left(\ell n\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)'}_{=:A} = (\cot x)\,\ell n\left(\sqrt{\sin x}\right)$$

$$A = \frac{\left(\sqrt{\sin x}\right)'}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sin x} = \frac{1}{2}\cot x\,.$$

3. $$\left(e^{2\tan\sqrt{x}}\right)' = 2\underbrace{\left(\tan\sqrt{x}\right)'}_{=:B} e^{2\tan\sqrt{x}} = \frac{(1+\tan^2\sqrt{x})e^{2\tan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$B = \left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{(1+\tan^2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

4. $$\left(\sqrt{x-\sqrt{1+\cot\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2\left(x-\sqrt{1+\cot\sqrt{x}}\right)}\underbrace{\left(x-\sqrt{1+\cot\sqrt{x}}\right)'}_{=:C} =$$

$$= \frac{1}{2\left(x-\sqrt{1+\cot\sqrt{x}}\right)}\left(1+\frac{1+\cot^2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(1+\cot\sqrt{x}\right)}\right)$$

$$C = 1-\frac{\left(1+\cot\sqrt{x}\right)'}{2\left(1+\cot\sqrt{x}\right)} = 1-\frac{-(1+\cot^2\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\left(1+\cot\sqrt{x}\right)} = 1+\frac{1+\cot^2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(1+\cot\sqrt{x}\right)}.$$

5. $\left(\sin(e^t)+e^{\sin t}\right)'=\left(\sin(e^t)\right)'+\left(e^{\sin t}\right)'=\left(e^t\cos(e^t)\right)+\left((\cos t)\,e^{\sin t}\right)$

6. $\left(\cos(\tan x^2)\right)'=-\left(\sin(\tan x^2)\right)\left(\tan x^2\right)'=-2x\left(\sin(\tan x^2)\right)(1+\tan^2 x^2)$.

7. $\left(2^{\cos \pi x}\right)'=(\cos \pi x)'\,2^{\cos \pi x}\,\ell n2=-\pi(\sin \pi x)2^{\cos \pi x}\,\ell n2$.

8. $(\log_2 \sin \pi x)'=\dfrac{(\sin \pi x)'}{\sin \pi x}\log_2 e=\dfrac{\pi(\cos \pi x)}{\sin \pi x}\log_2 e=\pi(\cot \pi x)\log_2 e$.

9. $\left(3^{2^{\sqrt{x}}}\right)'=\left(2^{\sqrt{x}}\right)'3^{2^{\sqrt{x}}}\,\ell n3=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}2^{\sqrt{x}}\,\ell n2\right)3^{2^{\sqrt{x}}}\,\ell n3$.

10. $(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{1}{\cos^2 x}(\cos x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\sin x=\sec x\tan x$.

11. $\left(\arccos^3(\sqrt{e^x})\right)'=3(\arccos^2\sqrt{e^x})\underbrace{(\arccos\sqrt{e^x})'}_{=:D}=-\dfrac{3e^x(\arccos^2\sqrt{e^x})}{2\sqrt{e^x(1-e^x)}}$

$$D=-\frac{\left(\sqrt{e^x}\right)'}{\sqrt{1-e^x}}=-\frac{\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}}{\sqrt{1-e^x}}=-\frac{e^x}{2\sqrt{e^x(1-e^x)}}.$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler II

Önbilgi 1. *(Bileşke fonksiyonun türevi)* $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0)$.

A1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\cos x$,

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x_0))\,g'(x)=\underbrace{(-\frac{1}{\cos^2 x})(-\sin x)}_{\text{dikkat: } g'(x)=-\sin x,\, f'(x)=-\frac{1}{x^2}}=\sec x\tan x.$$

Dikkat edilirse $(f\circ g)(x)=\sec x$ dir. Dolayısıyla buradaki türev işlemi Soru I-9 daki gibidir.

$$(g\circ f)'(\frac{2}{\pi})=g'\left(f(\frac{2}{\pi})\right)f'(\frac{2}{\pi})=\underbrace{(-\sin\frac{\pi}{2})\,(-\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2})}_{\text{dikkat: } f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ g'(x)=-\sin x}=(-1)\,(-\frac{\pi^2}{4})=\frac{\pi^2}{4}\ .$$

A2. $f(x)=x^2,\ g(x)=\ell nx,\ h(x)=\sqrt{x}\ ,\ k(x)=\sin x\ ,$

$$(f\circ g\circ h\circ k)'(x)=f'((g\circ h\circ k)(x))\,g'((h\circ k)(x))\,h'(k(x))\,k'(x)=$$

$$=\underbrace{(2\ell n\sqrt{\sin x})\,(\frac{1}{\sqrt{\sin x}})\,(\frac{1}{2\sqrt{\sin x}})\,(\cos x)}_{\text{dikkat: } k'(x)=\cos x,\ h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ g'(x)=\frac{1}{x},\ f'(x)=2x}=(\cot x)\,\ell n\left(\sqrt{\sin x}\right)$$

Dikkat edilirse $(f\circ g)(x)=\ell n^2\left(\sqrt{\sin x}\right)$ dir. Dolayısıyla buradaki türev işlemi Soru I-2 deki gibidir.

$$(h\circ g)'(e)=h'(g(e))\,g'(e)=\underbrace{(\frac{1}{2\sqrt{\ell ne}})\,(\frac{1}{e})}_{\text{dikkat: } g'(x)=\frac{1}{x},\ h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{1}{2e}\ .$$

B1. $f(x)=e^x g(x)\Rightarrow f'(x)=\left(e^x g(x)\right)' \underbrace{=}_{\text{çarpımın türevinden}} e^x g(x)+e^x g'(x)=e^x\left[g(x)+g'(x)\right].$

B2. $f(x)=g\left(g(x)\right)\Rightarrow\ f'(x)=\left(g\circ g\right)'(x)\underbrace{=}_{\text{bileşke fonk. türevinden}} g'\left(g(x)\right)g'(x)\,.$

B3. $f(x)=g(x^3)\Rightarrow\ f'(x)=\left(g\circ x^3\right)'(x)\underbrace{=}_{\text{bileşke fonk. türevinden}} 3x^2\,g'\left(x^3\right).$

B4. $f(x)=\left(g(x)\right)^3+e^{g(x)} \Rightarrow$

$$f'(x)=\left(\left(g(x)\right)^3+e^{g(x)}\right)'=\left(\left(g(x)\right)^3\right)'+\left(e^{g(x)}\right)'=3\left(g(x)\right)^2 g'(x)+g'(x)e^{g(x)}.$$

$$=g'(x)\left[3\left(g(x)\right)^2+e^{g(x)}\right].$$

C1. $h(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)} \Rightarrow$

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)}\right)' \underbrace{=}_{\text{bölümün türevinden}} \frac{\left(f(x)g(x)\right)'\left(f(x)-g(x)\right)-\left(f(x)g(x)\right)\left(f(x)-g(x)\right)'}{\left(f(x)-g(x)\right)^2}$$

$$=\frac{\left(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right)\left(f(x)-g(x)\right)-\left(f(x)g(x)\right)\left(f'(x)-g'(x)\right)}{\left(f(x)-g(x)\right)^2}.$$

C2. $h(x)=f\left(g(\sin x)\right) \Rightarrow$

$$h'(x)=\left(f\left(g(\sin x)\right)\right)' \underbrace{=}_{\text{bileşke fonk. türevinden}} f'\left(g(\sin x)\right)g'(\sin x)\,(\sin x)'$$

$$=(\cos x)\,f'\left(g(\sin x)\right)g'(\sin x).$$

C3. $h(x)=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \Rightarrow$

$$h'(x)=\left(\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}\right)'=\frac{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}}=\frac{\left(\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\right)}{2\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{2g^2(x)\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}}.$$

C4. $h(x)=f\left(\sqrt{\dfrac{1}{g(x)}}\right) \Rightarrow$

$$h'(x)=\left(f\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right)\right)'=f'\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right)'=f'\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right)\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{2\sqrt{\frac{1}{g(x)}}}$$

$$=f'\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right)\frac{\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{g(x)}}}=-\frac{f'\left(\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\right)g'(x)}{2g^2(x)\sqrt{\frac{1}{g(x)}}}.$$

Önbilgi 2. *(Zincir kuralı, Parametreye bağlı fonksiyonlarda türev)*

$$\left.\begin{array}{l} x=f(u) \\ y=g(u) \\ u=h(s) \\ s=j(t) \end{array}\right\} \text{ verilsin. } \frac{dy}{dt}=?\ ,\ \frac{dy}{dx}=?$$

$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}=$ $=\frac{d}{du}(g(u))\frac{d}{ds}(h(u))\frac{d}{dt}(j(t)).$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=$ $=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}=\frac{\frac{d}{du}(g(u))}{\frac{d}{du}(f(u))}.$

şeklinde bulunur.

D1. $\left.\begin{array}{l} y=1+\ell n(x^2+1) \\ x=e^\theta+\theta \\ z=\cos^2\theta \\ \theta=\arcsin t \end{array}\right\}$ veriliyor. Önbilgi-2 deki yöntemden yararlanacağız.

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{dx}\left(1+\ell n(x^2+1)\right)\frac{d}{d\theta}\left(e^\theta+\theta\right)$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}\left(e^{\theta}+1\right)\underbrace{=}_{x=e^{\theta}+\theta\text{ idi.}}\frac{2(e^{\theta}+\theta)(e^{\theta}+1)}{(e^{\theta}+\theta)^2+1}\Rightarrow\frac{dy}{d\theta}(0)=\frac{2(e^{0}+0)(e^{0}+1)}{(e^{0}+0)^2+1}=2.$$

$$\frac{dy}{dt}=\underbrace{\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}}_{=\frac{dy}{d\theta}}\frac{d\theta}{dt}=\frac{2(e^{\theta}+\theta)(e^{\theta}+1)}{(e^{\theta}+\theta)^2+1}\frac{d}{dt}\left(\arcsin t\right)$$

$$=\frac{2(e^{\theta}+\theta)(e^{\theta}+1)}{(e^{\theta}+\theta)^2+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\underbrace{=}_{\theta=\arcsin t\text{ idi.}}\frac{2(e^{\arcsin t}+\arcsin t)(e^{\arcsin t}+1)}{(e^{\arcsin t}+\arcsin t)^2+1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{\frac{dz}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta)}{\frac{d}{d\theta}(e^{\theta}+\theta)}=\frac{-2\cos\theta\sin\theta}{e^{\theta}+1}=-\frac{\sin 2\theta}{e^{\theta}+1}.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-\sin 2\theta}{e^{\theta}+1}\right)=\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-\sin 2\theta}{e^{\theta}+1}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{\frac{-2\cos 2\theta+(e^{\theta}+1)\sin 2\theta}{(e^{\theta}+1)^2}}{e^{\theta}+1}=\frac{-2\cos 2\theta+(e^{\theta}+1)\sin 2\theta}{(e^{\theta}+1)^3}.$$

D2. $\left.\begin{array}{l}x=\sqrt{1-t}\\ y=\sqrt{1-\sqrt{t}}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\sqrt{t}}\right)}{\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-t}\right)}=\frac{\frac{(1-\sqrt{t})'}{2\sqrt{1-\sqrt{t}}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}\underbrace{=}_{\text{türev işlemi yapılıp düzenlenirse}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-t}{t(1-\sqrt{t})}}.$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler III

Önbilgi 3. $u=u(x)$, $v=v(x)$ olmak üzere, $\left(u^{v}\right)'=?$

$$y=u^{v} \text{ diyelim } \underbrace{\Rightarrow}_{\text{her iki taraf için } \ell n \text{ alalım}} \ell n y=\ell n u^{v}=v\,\ell n u$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{şimdi her iki tarafın türevini alalım}} \frac{y'}{y}=\left(v\,\ell n u\right)'=v'\ell n u+v\left(\ell n u\right)'$$

$$\Rightarrow \quad y'=y\left(v'\ell n u+v\left(\ell n u\right)'\right)$$

$$\Rightarrow \quad y'=u^{v}\left(v'\ell n u+v\left(\ell n u\right)'\right).$$

(*) Kısaca formülize edersek: $\left(u^{v}\right)'=u^{v}\left(v\,\ell n u\right)'$.

1. $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{x}\right)' \underbrace{=}_{(*)\text{ dan}} \left(\sqrt{x}\right)^{x}\left(x\,\ell n\sqrt{x}\right)'=\left(\sqrt{x}\right)^{x}\left(\ell n\sqrt{x}+\dfrac{x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^{x}\left(\dfrac{1}{2}+\ell n\sqrt{x}\right).$

2. $\left(x^{\cos x}\right)' \underbrace{=}_{(*)\text{ dan}} x^{\cos x}\left(\cos x\,\ell n\,x\right)'=x^{\cos x}\left(-\sin x\,\ell n\,x+\dfrac{\cos x}{x}\right).$

3. $\left(2^{x^{x}}\right)'=\left(\ell n 2\right)2^{x^{x}}\left(x^{x}\right)' \underbrace{=}_{(*)\text{ dan}} \left(\ell n 2\right)2^{x^{x}}\left(x^{x}\left(x\,\ell n\,x\right)'\right)=\left(\ell n 2\right)2^{x^{x}}x^{x}\left(1+\ell n\,x\right)$

4.

$$\left(x^{(\ell nx)^x}\right)' \underbrace{=}_{(*)\text{ dan}} x^{(\ell nx)^x}\left[(\ell n x)^x \ell n x\right]' = x^{(\ell nx)^x}\left[\underbrace{\left((\ell n x)^x\right)'}_{\substack{=(\ell nx)^x (x\,\ell nx)' \\ =(\ell nx)^x (1+\ell nx)}} \ell n x + \frac{(\ell n x)^x}{x}\right]$$

$$= x^{(\ell nx)^x}\left((\ell n x)^x (1+\ell n x) + \frac{(\ell n x)^x}{x}\right).$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler IV

A1. $f(x)=\sqrt{x}\,,\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ f''(x)=-\dfrac{1}{2.2}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\ ,\ f'''(x)=\dfrac{1.3}{2.2.2}\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}\,,\dots,$

$f^{(n)}(x)=\dfrac{1.3.5...(2n-3)}{2^n}\dfrac{1}{\sqrt{x^{2n-1}}}\,.$

A2. $\dfrac{d^n}{dx^n}(\cos x)=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right).$

A3. $\dfrac{d^n}{dx^n}(\ell n(x-1))=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x-1)^n}\,.$

A4. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(xe^x\right)=e^x\,(x+n)\,.$

A5. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-kx}\right)=(-1)^n\,k^n\,e^{-kx}\,.$

A6. $\dfrac{d^n}{dx^n}(\sin 2x)=2^n\sin\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right).$

Önbilgi 4. *Leibniz Çarpım Kuralı:*

$$
\begin{aligned}
(f.g)^{(n)} &= f^{(n)}\, g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}\, g' + \ldots \\
&\qquad + \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)} + \ldots + f\, g^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)} .
\end{aligned}
$$

B. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = x^2$ diyelim $\Rightarrow$ $h(x) = f(x).g(x)$ yani kısaca $h = f.g$.

Şimdi n.mertebeden türevleri belirleyelim:

$$f' = -e^{-x}\,,\ f'' = e^{-x}\,,\ \ldots,\ f^{(n)} = (-1)^n e^{-x}\,,$$

$$g' = 2x\,,\ g'' = 2\,,\ g''' = \ldots = g^{(n)} = 0\,.$$

Şimd Leibniz Çarpım Kuralını uygulayalım, burada g nin 3.mertebe ve bu mertebeden daha büyük mertebeli türevlerinin sıfıra eşit olmasından ötürü toplam formülünde yalnızca g, g', g'' terimlerinin kullanıldığı ifadeler ile ilgilenecegiz:

$$
\begin{aligned}
h^{(n)} = (f.g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)} \\
&= f^{(n)}\, g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}\, g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}\, g'' + 0 \\
&= (-1)^n e^{-x} x^2 + n(-1)^{n-1} e^{-x}(2x) + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} e^{-x}(2) \\
&= (-1)^n e^{-x}\left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right).
\end{aligned}
$$

Yanıtlar - Yol Göstermeler V

Önbilgi 5. Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı gerçel değerli f ve g fonksiyonları ve bu fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:

$(f\text{-H1})$: $f : [a,b]$ kapalı aralığında SÜREKLİ.
$(f\text{-H2})$: $f : (a,b)$ açık aralığında TÜREVLENEBİLİR.
$(f\text{-H3})$: $f(a) = f(b)$.

Yazımda kolaylık olması açısından $(g\text{-H1})$ ve $(g\text{-H2})$ ile: sırasıyla, $(f\text{-H1})$ ve $(f\text{-H2})$ de f yerine g yazılması ile elde edilen koşullar kastediliyor olacak.

(i) *(Rolle Toremi)*

$(f\text{-H1})$, $(f\text{-H2})$ ve $(f\text{-H3})$ koşulları geçerli olsun. $\Rightarrow \exists c \in (a,b)\ ,\ f'(c) = 0$.

(ii) *(Ortalama Değer Teoremi- kısaca ODT)*

$(f\text{-H1})$ ve $(f\text{-H2})$ koşulları geçerli olsun. $\Rightarrow \exists c \in (a,b)\ ,\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(iii) *(Genelletirilmiş Ortalama Değer Teoremi- kısaca GODT)*

$(f\text{-H1})$, $(f\text{-H2})$, $(g\text{-H1})$, $(g\text{-H2})$ koşulları geçerli olsun. $\Rightarrow \exists c \in (a,b)\ ,\ \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Not: Teoremde sağdaki rasyonel ifadenin paydasını daima sıfırdan farklı kılacak uygun koşulların da Teoremin hipotezlerine eklenildiği düşünülmektedir.

(iv) *(Artanlık-Azalanlık ile ilgili Teoremler (yeter koşullar))*

$(f\text{-H2})$ geçerli olsun.

(iv)-T1. "$\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$" $\Rightarrow$ $f : (a,b)$ de (kesin) artandır.

(iv)-T2. "$\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$" $\Rightarrow$ $f : (a,b)$ de (kesin) azalandır.

A. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $x_0 = 1$ de süreklilik ve türevlenebilirlik özelliklerini sağlayıp sağlamadıklarını Çalışma Sorusu 1- (V)(A) da incelemiştik. Bu sonuçlardan yararlanacağız (Bu soruyu tekrardan inceleyiniz).

A1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 1 \\ 2x & ,x>1 \end{cases}$ fonksiyonu $x_0=1$ de sürekli değildir. $1\in[0,2]$ olduğu için de ODT nin hipotezlerinden $(f\text{-H1})$ koşulu sağlanmaz dolayısıyla f fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT** uygulanamaz.

A2. $g(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 1 \\ x & ,x>1 \end{cases}$ fonksiyonu $x_0=1$ de sürekli idi. Dolayısıyla fonksiyon $[0,2]$ de sürekli olacaktır ve ODT nin hipotezlerinden $(g\text{-H1})$ sağlanacaktır. Ancak fonksiyon $x_0=1$ de türevlenemediği ve $1\in(0,2)$ olduğu için ikinci hipotez $(g\text{-H2})$ sağlanmaz. Dolayısıyla g fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT** uygulanamaz.

A3. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & ,x\ne 2 \\ x & ,x=2 \end{cases}$. Dikkat edilirse $\varphi(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de $x_0=2$ haricindeki noktalarda türevlenebilirdir. ODT nin hipotezlerinden $(\varphi\text{-H2})$ yani "φ: $(0,2)$ açık aralığında türevlenebilir" koşulu sağlanır. Ancak fonksiyon $x_0=2$ de sağdan sürekli olmadığı için (çünkü incelenirse $\varphi(2+)=\infty\ne 2=\varphi(2)$), $(\varphi\text{-H1})$ yani "φ: $[0,2]$ kapalı aralığında sürekli" koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla φ fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT** uygulanamaz.

A4. $h(x)=x^3-x$ bir polinom olduğundan $\mathbb{R}$ de sürekli ve türevlenebilidir. Dolayısıyla ODT nin her iki hipotezi de sağlanır. Böylece h fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT** uygulanabilir. Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım:

$$\left.\exists c\in(0,2)\ ,\ h'(c)=\frac{h(2)-h(0)}{2-0}\quad\right\}\begin{aligned}&\Rightarrow h'(x)=\left(x^3-x\right)'=3x^2-1\\&\Rightarrow h'(c)=3c^2-1\\&\Rightarrow \frac{h(2)-h(0)}{2-0}=\frac{(2^3-2)-0}{2}=3\\&\Rightarrow 3c^2-1=3\\&\Rightarrow c=\pm\frac{2}{\sqrt{3.}}\\&\Rightarrow c\in(0,2)\text{ olacağından aranılan } c=\frac{2}{\sqrt{3}}\in(0,2)\end{aligned}$$

A5. $\phi(x)=2e^{-x}$ bir polinom olduğundan $\mathbb{R}$ de türevlenebilirdir ($\phi'(x)=-2e^{-x}$) ve dolayısıyla süreklidir. O halde ODT nin her iki hipotezi de sağlanır. Böylece ϕ fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT** uygulanabilir. Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left.\exists c\in(0,2)\ ,\ \phi'(c)=\frac{\phi(2)-\phi(0)}{2-0}\quad\right\}\begin{aligned}&\Rightarrow \phi'(x)=-2e^{-x}\\&\Rightarrow \phi'(c)=-2e^{-c}\\&\Rightarrow \frac{\phi(2)-\phi(0)}{2-0}=\frac{2e^{-2}-2}{2}=e^{-2}-1\\&\Rightarrow -2e^{-c}=e^{-2}-1\Rightarrow e^{-c}=\frac{1-e^{-2}}{2}\\&\Rightarrow c=-\ell n\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right).\end{aligned}$$

A6. $\gamma(x)=\dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonu $[0,2]$ de sürekli ve $(0,2)$ de türevlenebilirdir ($\gamma'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$). O halde ODT nin her iki hipotezi de sağlanır. Böylece ϕ fonksiyonuna $[0,2]$ de **ODT** uygulanabilir. Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} \exists c \in (0,2)\ , \\ \phi'(c) = \dfrac{\gamma(2)-\gamma(0)}{2-0} \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma'(c) = \frac{1}{(c+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma(2)-\gamma(0)}{2-0} = \frac{\frac{2}{3}-0}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(c+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$\Rightarrow c \in (0,2)$ olacağından aranılan $c = -1+\sqrt{3} \in (0,2)$.

B1. " $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için $\tan x > x$ "

I.yol: $f(x) := \tan x$ fonksiyonuna $[0,x]$ aralığında (burada $x < \frac{\pi}{2}$) ODT uygulayarak:

"fonksiyon $[0,x]$ de sürekli ve $f'(x) = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ türevi $(0,x)$ de mevcut (yani türevlenebilir) olduğundan ODT uygulanabilir".

$$\left.\begin{array}{l} \exists c \in (0,x)\ , \\ f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < c < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\underbrace{\frac{\tan x - \tan 0}{x-0}}_{=\frac{\tan x}{x}} = \frac{1}{\cos^2 c} \underbrace{\geq}_{\substack{\text{çünkü daima } \cos x \leq 1 \\ \text{bu ve } 0<c<\frac{\pi}{2} \text{ özelliğinden} \\ \cos^2 c < 1}} 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x}{x} > 1 \quad \Rightarrow \tan x > x\,.$$

II.yol: $g(x) := (\tan x) - x$ fonksiyonun $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında artan olduğunu göstererek:

$g'(x) = \tan^2 x \underbrace{\geq}_{\substack{x<\frac{\pi}{2} \text{ için } \tan x \neq 0 \text{ ve} \\ \text{gerçel bir sayının karesi} \\ \text{daima sıfırdan büyük olacağından}}} 0 \Rightarrow$ Önbilgi 5-**(iv)-T1** den istenilen elde edilir.

B2. "$\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $\left|\sin a - \sin b\right| \leq \left|a-b\right|$ "

I.durum: "$b > a$ olsun". $f(x) := \sin x$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında ODT uygulayalım:

"f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de türevlenebilirdir ($f'(x) = \cos x$) dolayısıyla süreklidir (Böylece f in $[a,b]$ de süreklik ve (a,b) de türevlenebilirlik özellikleri sağlanır) O halde bu fonksiyona $[a,b]$ de ODT uygulanabilir".

$$\left.\begin{array}{c} \exists c \in (a,b) \,, \\ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(c) = \cos c, \\ \dfrac{f(a)-f(b)}{b-a} = \dfrac{\sin b - \sin a}{b-a} \\ \Rightarrow \cos c = \dfrac{\sin b - \sin a}{b-a} \\ \Rightarrow \sin b - \sin a = \underbrace{(\cos c)}_{\text{(daima)} \leq 1} (b-a) \leq b-a \\ \Rightarrow \sin b - \sin a \leq b-a \,. \end{array}$$

II.durum: "$a > b$ olsun". $\sin a - \sin b \leq a-b$ elde edilir (yukarıdaki sonuçta a ve b nin yeri değiştirilerek işlemler tekrarlanırsa bu sonucun elde edileceği açıktır).

II.durum: "$a = b$ olsun". $\sin a - \sin b = \sin a - \sin a = 0 = a-b = b-a$.

B3. "$\forall x > 0$ için $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ "

$f(x) := \sqrt{1+x}$ fonksiyonuna $[0,x]$ aralığında ODT uygulayalım:

"f fonksiyonu $[0,x]$ de sürekli ve $(0,x)$ de türevlenebilirdir ($f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$) O halde bu fonksiyona $[0,x]$ de ODT uygulanabilir".

$$\left.\begin{array}{c}\exists c\in(0,x)\ ,\\ f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{1+c}},$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+c}}}_{(c\in(0,x)\text{ oldugundan daima})\,<\,1}<1$$

$$\Rightarrow \frac{2\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x}<1\Rightarrow \sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}.$$

B4. “ $\forall x>0$ için $\ell n(1+x)\leq x$ “

$f(x):=\ell n(1+x)$ fonksiyonuna $[0,x]$ aralığında ODT uygulayalım:

“ f fonksiyonu $[0,x]$ de sürekli ve $(0,x)$ de türevlenebilirdir $\left(f'(x)=\dfrac{1}{1+x}\right)$ O halde bu fonksiyona $[0,x]$ de ODT uygulanabilir”.

$$\left.\begin{array}{c}\exists c\in(0,x)\ ,\\ f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{1+c},$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ell n(1+x)-\ell n1}{x}=\frac{\ell n(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c}=\frac{\ell n(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell n(1+x)}{x}=\underbrace{\frac{1}{1+c}}_{(c\in(0,x)\text{ oldugundan daima})\,<\,1}<1$$

$$\Rightarrow \frac{\ell n(1+x)}{x}<1\Rightarrow \ell n(1+x)<x.$$

C.

f ve g türevlenebilir

(i) $f(0)=g(0)$,

(ii) $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)\leq g'(x)$

$\Rightarrow$ f,g fonksiyonuna $[0,x]$ aralığında GODT uygulayalım.

"f,g fonksiyonları türevlenebilir olduğundan $[0,x]$ de sürekli ve $(0,x)$ de türevlenebilir olacaktır. O halde GODT uygulanabilir"

$$\exists c\in(0,x)\ ,\ \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\underset{\text{(ii) den}}{\leq}1 \Rightarrow f(x)-f(0)\leq g(x)-g(0)$$

$\Downarrow$ **(i)** den

$$f(x)\leq g(x)$$

D1. $f(x)=x^{\frac{2}{3}}+1$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sürekli; "$f(-1)=f(1)=2$". O halde Önbilgi 5(i) den Teoremin iki hipotezi ($(f\text{-H1})$ ve $(f\text{-H3})$) sağlanır. Ancak $f'(x)=\dfrac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$ ($x\neq 0$) gözleminden fonksiyonun $x_0=0\in[-1,1]$ noktasında türevinin mevcut olmadığı anlaşılır. Dolayısıyla Teoremin diğer hipotezi (yani $(f\text{-H2})$) geçerli olmaz. Böylece f fonksiyonuna $[-1,1]$ de **Rolle Teoremi** uygulanamaz.

D2. $f(x)=x\sqrt{x+3}$ fonksiyonu $[-3,0]$ aralığında sürekli; $(-3,0)$ aralığında türevlenebilir" ($f'(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$) ; $f(-3)=f(0)=0$" . O halde Önbilgi 5(i) den Teoremin hipotezleri sağlanır. Böylece f fonksiyonuna $[-6,0]$ da **Rolle Teoremi** uygulanabilir.

Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left.\exists c \in (-3,0)\ ,\ f'(c)=0\ \right\} \Rightarrow f'(c)=\frac{3c+6}{2\sqrt{c+6}}=0$$
$$\Rightarrow c=-2\ .$$

D3. $f(x)=\sin 2\pi x$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında süreklidir (bunu durumu, $(\sin x)\circ(2\pi x)$ yazımından ve "sürekli fonksiyonların bileşke fonksiyonu da süreklidir" gerçeğinden gözlemlemek mümkün); $(-1,1)$ aralığında türevlenebilirdir" ($f'(x)=2\pi\cos 2\pi x$) ; $f(-1)=f(1)=0$" . O halde Önbilgi 5(i) den Teoremin hipotezleri sağlanır. Böylece f fonksiyonuna $[-1,1]$ de **Rolle Teoremi** uygulanabilir. Şimdi Teoremde sözü geçen sabiti bulalım.

$$\left.\exists c \in (-1,1)\ ,\ f'(c)=0\ \right\} \Rightarrow f'(c)=2\pi\cos 2\pi c=0$$
$$\Rightarrow \cos 2\pi c=0 \Rightarrow c=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n\ .$$
$$\Rightarrow c\in(-1,1) \text{ olacağından aranılan } c \text{ ler :}$$
$$n=0,\ n=\pm 1 \text{ için } \Rightarrow c=\frac{1}{4},\ c=\pm\frac{3}{4}\in(-1,1).$$

E. $f(x)$ fonksiyonunu türevi $4x^3-16x+7$ olacak şekilde seçelim, $f(x):=x^4-8x^2+7x$ .Bu fonksiyon $[0,1]$ de süreklidir ve $(0,1)$ de türevlenebilirdir üstelik "$f(0)=f(1)=0$"O halde Önbilgi 5(i) den Teoremin hipotezleri sağlanır. Böylece f fonksiyonuna $[0,1]$ de **Rolle Teoremi** uygulanabilir. Teoremden $\exists c\in(0,1)$, $f'(c)=4c^3-16c+7=0$.

F. Önbilgi 5-**(iv)** den yararlanacağız.

F1. $f(x)=2x+1 \Rightarrow f'(x)=2>0 \underbrace{\Rightarrow}_{(\text{ iv })\text{-T1 den}} f\ :\ \mathbb{R}$ de artandır.

F2. $f(x)=-x+2 \Rightarrow f'(x)=-1<0 \underbrace{\Rightarrow}_{(\text{ iv })\text{-T2 den}} f\ :\ \mathbb{R}$ de azalandır.

F3. $f(x)=x^2-4x+6 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=2x-4<0\ , \ \forall x\in(-\infty,-2) \\ f'(x)=2x-4\geq 0\ , \ \forall x\in(2,\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow f:\ (-\infty,-2)$ de azalan; $(2,\infty)$ de artandır.

F4. $f(x)=x^3-27x+10 \Rightarrow f'(x)=3x^2-27=3(x-3)(x+3)$

	$x<-3$	$-3<x<3$	$x>3$
$f'(x)$ in işareti	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	artan	azalan	artan

F5. $f(x)=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$1-\dfrac{1}{x}$	$+$	$+$	$-$	$+$
$1+\dfrac{1}{x}$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$ in işareti	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	artan	azalan	azalan	artan

F6. $f(x)=x-2\sin x \Rightarrow f'(x)=1-2\cos x$

$$\underbrace{\begin{array}{l} f'(x)=1-2\cos x>0 \Leftrightarrow \cos x<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5\pi}{3} \text{ veya } \dfrac{7\pi}{3}<x<3\pi \\ f'(x)=1-2\cos x<0 \Leftrightarrow \cos x>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\pi}{3} \text{ veya } \dfrac{5\pi}{3}<x<\dfrac{7\pi}{3}\ . \end{array}}$$

$\Downarrow$ **(iv)**-T1 ve T2 den

$f:\ \left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$ ve $\left(\dfrac{7\pi}{3},3\pi\right)$ de artan ; $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ ve $\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}\right)$ de azalandır.