Analiz III

Çalışma Soruları –1 **02.11.2015**

A. *Aşağıda verilen fonksiyon dizi ve fonksiyon serilerinin yanlarında yazılı aralıklar üzerinde Düzgün Yakınsak olup olmadığını araştırınız. İstenilen limitleri bulunuz.*

1. $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^{3n}}$; $E_1=[0,1]$, $E_2=\left[0,\dfrac{1}{3}\right)$

2. $f_n(x)=\dfrac{nx}{2+n^4x^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sin nx)\,f_n(x)$; $[1,\infty)$

3. $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{n+x}$, $\dfrac{1}{f_n(x)}$ $(n=1,2,\ldots)$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$; $[1,2]$

4. $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+x^6}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$; $[1,\infty)$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$; $[0,\infty)$. $\lim\limits_{x\to0+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}=?$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n n^x}$; $[0,\infty)$. $\lim\limits_{x\to0+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n n^x}=?$

7. $f_n(x)=\sqrt[n]{\cos x}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$; $[0,\pi/2]$

8. $f_n(x)=\dfrac{nx}{2+n^7x^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$; $[0,\infty)$

B. *Aşağıda verilen fonksiyon dizileri yanlarında yazılı aralıklar üzerinde Düzgün Yakınsak mı? yanıtınızı Cauchy Kriterini kullanarak kanıtlayınız.*

9. $f_n(x)=1+\dfrac{x}{n^3}$, $\mathbb{R}$ $(n=1,2,\ldots)$

10. $f_n(x)=\dfrac{1+2nx}{3+n^2x^2}$, $[0,1]$ $(n=1,2,\ldots)$

11. $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x^{3n}}$; $[0,1)$ $(n=1,2,\ldots)$

S.İlter, http://aves.istanbul.edu.tr/ilters

C. *Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapını, yakınsaklık bölgesini (aralığını) belirleyiniz (uç noktalarda yakınsaklık araştırması yapınız).*

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)} x^n$	**15.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n} (x-1)^n$	**16.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)2^n} x^n$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n$	**17.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^{3/2}-1)2^n} x^n$
	18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3n} (x-3)^n$

Not: Yanıtlar-Yol göstermeler kontrol amaçlıdır, yazım hatası - eksiklikler vs.. olabilir. Çözümlerin hemen hepsinde ara işlemler eksiktir, ara işlemleri tamamlayarak yaptığınız *kendi çözümlerinizle mutlaka karşılaştırınız..*

Yantılar-Yol Göstermeler...

(son güncelleme : 02.11.2015)

$f(x) : f_n(x)$ in Noktasal limit fonksiyonu, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

$g(x) := \left| f_n(x) - f(x) \right|$,

$M_n := \sup\limits_{x\in A} \left| f_n(x) - f(x) \right|$,

$\varphi_n \ : \ \left| f_n(x) - f(x) \right| \le \varphi_n$ şeklindeki **sıfır dizisi**.

A1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{3n}}$, $E_1 = [\,0\,,1\,]$, $E_2 = \left[\,0\,,\dfrac{1}{3}\right)$

(f_n) : E_1 üzerinde Düzgün Yakınsak Değil	**Noktasal limit fonksiyonunun sürekliliğine bakınız.**

(f_n) : E_2 üzerinde Düzgün Yakınsak	$\varphi_n = \dfrac{1}{3^n}$ **elde edip açıklayınız.**

A2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{2+n^4x^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin nx\right) f_n(x)$; $[\,1,\infty\,)$

(f_n) : $[\,1,\infty\,)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$g(x) \underbrace{\le}_{2>0 \text{ dan}} \dfrac{nx}{n^4x^2} = \dfrac{1}{n^3x} \underbrace{\le}_{x\ge 1 \text{ dan}} \dfrac{1}{n^3} = \varphi_n$ şeklinde devam ediniz.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin nx\right) f_n(x)$: $[\,1,\infty\,)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$\left\|(-1)^n \left(\sin nx\right) f_n(x)\right\| \underbrace{\le}_{\|\sin nx\|\le 1 \text{ den}} \left\|f_n(x)\right\| \le \dfrac{1}{n^3}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ serisi yakınsaktır. Weierstrass Testini uygulayınız.

Çalışma Soruları –1

A3. $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{n+x}$, $\dfrac{1}{f_n(x)}$ $(n=1,2,\dots)$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $[1,2]$

(f_n) : $[1,2]$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$f_n(x)\to x^2=f(x)\,,\,x\in[1,2]$ $g(x):=\lvert f_n(x)-f(x)\rvert=\left\lvert \dfrac{nx^2}{n+x}-x^2\right\rvert$ $=\left\lvert \dfrac{x^3}{n+x}\right\rvert$ $M_n \underbrace{=}_{g(x)\,:E \text{ de Artan, gözleyiniz}} \underbrace{g(2)=\dfrac{8}{n+2}\to 0}_{\Downarrow}$ Düzgün Yak.tır.

$\dfrac{1}{f_n(x)}=\dfrac{n+x}{nx^2}$: $[1,2]$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$\dfrac{1}{f_n(x)}\to\dfrac{1}{x^2}=f^*(x)\,,\,x\in[1,2]$ $\left\lvert \dfrac{1}{f_n(x)}-f^*(x)\right\rvert=\dfrac{1}{nx}\underbrace{\le}_{x>1 \text{ den}}\dfrac{1}{n}=\underbrace{\varphi_n\to 0}_{\Downarrow}$ Düzgün Yak.tır.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^2}{n+x}$: $[1,2]$ üzerinde Düzgün Yakınsak değil	$f_n(x)=\dfrac{nx^2}{n+x}\to x^2\neq 0 \Rightarrow$ " $f_n(x)\rightrightarrows 0\,,\; x\in[1,2]$ " koşulu sağlanmaz!

A4. $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+x^6}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; $[1,\infty)$

(f_n) : $[1,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$f_n(x)\to 0=f(x)\,,\,x\in[1,\infty)$ (Sıkıştırma Teo.den gözleyebilirsiniz.) $g(x)\underbrace{\le}_{\lvert\sin nx\rvert\le 1 \text{ ve } x\ge 1 \text{ den}}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^6+1}}=\varphi_n$ şeklinde devam ediniz.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+x^6}}$: $[1,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$\lvert f_n(x)\rvert \underbrace{\le}_{\lvert\sin nx\rvert\le 1 \text{ ve } x\ge 1 \text{ den}} \frac{1}{\sqrt[5]{n^6+1}}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^6+1}}$ serisi yakınsaktır (nedenini açıklayınız!) Weierstrass Testini uygulayınız.

A5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$; $[0,\infty)$. $\ell=\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}=?$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$: $[0,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n$; $a_n(x)=\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}$, $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ seçip Abel Testinin Uygulayınız.

"$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$: $[0,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak" ve "$\lim_{x\to 0+}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ limiti mevcut" olduğundan: **limit sembolü ile toplam sembolünün sırası değiştirilebilir.**

$\Rightarrow \ell=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0+}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (not: bu son seri: alterne seriler için Leibnitz Testinden yakınsaktır)

A6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n^x}$; $[0,\infty)$. $\ell=\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n^x}=?$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n^x}$: $[0,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	**I.yol:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n$; $a_n(x)=\frac{1}{n^x}$, $b_n=\frac{1}{3^n}$ seçip Abel Testinin Uygulayınız. **II.yol:** $\lvert f_n(x)\rvert\le\frac{1}{3^n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ serisi yakınsaktır (geometrik seri) Weierstrass Testini uygulayınız.

"$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n^x}$: $[0,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak" ve " $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{3^n n^x}=\frac{1}{3^n}$ limiti mevcut" olduğundan: **limit sembolü ile toplam sembolünün sırası değiştirilebilir.**

$$\Rightarrow \ell=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{3^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

(**not:** $0<a<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$ geometrik serisinin toplamı $\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$ ve bunun bir sonucu olarak $\sum_{n=1}^{\infty}a^n=\frac{a}{1-a}$ olduğunu biliyoruz)

A7. $f_n(x)=\sqrt[n]{\cos x}$, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$; $E=[0,\pi/2]$

(f_n) : E üzerinde Düzgün Yakınsak Değil	$f_n(x)\to f(x)=\begin{cases}1 & ,0<x<\pi/2\\ 0 & ,x=\pi/2\end{cases}$ **Noktasal limit fonksiyonunun sürekliliğine bakınız.**

$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\cos x}$: E üzerinde Düzgün Yakınsak değil	" $f_n(x)\rightrightarrows 0$, $x\in E$ " koşulu sağlanmaz!

A8. $f_n(x)=\frac{nx}{2+n^7x^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$; $[0,\infty)$

(f_n) : $[0,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$f_n(x)\to 0=f(x)$, $x\in[0,\infty)$ $g(x):=\lvert f_n(x)-f(x)\rvert=\frac{nx}{2+n^7x^2}$ $g'(x)=0$ dan incelenirse $x=\frac{2}{n^7}\in[0,\infty)$ ($\forall n$ için) maksimum noktadır. Sonuçta $M_n=\underbrace{g(\frac{2}{n^7})=\frac{2n}{2n^7+4}\to 0}_{\Downarrow \text{ Düzgün Yak.tır.}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{2+n^7x^2}$: $[1,\infty)$ üzerinde Düzgün Yakınsak	$\lvert f_n(x)\rvert\le g(\frac{2}{n^7})=\frac{2n}{2n^7+4}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n^7+4}$ serisi yakınsaktır (nedenini açıklayınız!) Weierstrass Testini uygulayınız.

B9. $f_n(x)=1+\frac{x}{n^3}$, $E=\mathbb{R}$ $(n=1,2,\dots)$

$\varepsilon_0=\frac{7}{8}>0$ sayısı verilsin. $\forall n_0\in\mathbb{N}$ için $\begin{cases} n=n_0\ ,\ m=2n_0 \\ x_0=n_0^{\,3}\in E \end{cases}$

olsun. Bu durumda $\lvert f_n(x_0)-f_m(x_0)\rvert=\left|1+\frac{n_0^{\,3}}{n_0^{\,3}}-\left(1+\frac{n_0^{\,3}}{2^3n_0^{\,3}}\right)\right|=\frac{7}{8}=\varepsilon_0$.

Buradan ise Cauchy Kriterinden, (f_n) : E üzerinde Düzgün Yakınsak Değildir.

B10. $f_n(x)=\frac{1+2nx}{3+n^2x^2}$, $E=[0,1]$. Benzer şekilde, $\varepsilon_0=\frac{1}{28}$, $n=n_0$, $m=2n_0$,

$x_0=\frac{1}{n_0}\in E$ alarak devam ediniz.

B11. $f_n(x)=\frac{x^n}{1-x^{3n}}$; $E=[0,1)$. Benzer şekilde, $\varepsilon_0=\frac{171}{728}$, $n=n_0$, $m=2n_0$,

$x_0=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n_0}}\in E$ alarak devam ediniz.

C. yol göstermeler için öncelikle bakınız: önbilgiler-seriler (aşağıda)

C12: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)} x^n$	$\limsup \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = \lim \left(\frac{n}{n+1} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \right) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$ $\|x\| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ **(i)** $x = 1$ için $\sum \frac{1}{n(n^2+1)}$ yakınsak [$b_n = \frac{1}{n^3}$ seç K.T **(ii)** uygula!] **(ii)** $x = -1$ için $\sum \frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}$ yakınsak [Mutlak-Yak. + Teo3] $\Rightarrow$ **(i)** ve **(ii)** den $\boldsymbol{Y.B.} = [\mathbf{-1, 1}]$

C13: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n} (x-1)^n$	$\limsup \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{1}{1/5} = \mathbf{5}$ $\|x-1\| < 5 \Rightarrow -4 < x < 6$ **(i)** $x = -4$ için $\sum n^2$ ıraksak [$\lim n^2 = \infty \neq 0$, Sonuç1] **(ii)** $x = 6$ için $\sum (-1)^n n^2$ ıraksak [Sonuç1] $\Rightarrow$ **(i)** ve **(i)** den $\boldsymbol{Y.B.} = (\mathbf{-4, 6})$

C14: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n$	$\limsup \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = \lim \frac{3n^3}{(n+1)^3} = 3 \Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ $\|x\| < 1/3 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ **(i)** $x = 1/3$ için $\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak **(ii)** $x = -1/3$ için $\sum \frac{(-1)^n}{n^3}$ yakınsak [Mutlak-Yak. + Teo3] $\Rightarrow$ **(i)** ve **(i)** den $\boldsymbol{Y.B.} = \left[\mathbf{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \right]$

C15: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$\limsup \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{R} = \infty$ ***Not2* : (ii) den *Y.B.*** $= \mathbb{R}$

C16: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)2^n} x^n$	$\limsup \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = \lim \frac{n+1}{n} \frac{n^2-1}{(n+1)^2-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{1}{1/2} = \mathbf{2}$ $\|x\| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$ **(i)** $x = 2$ için $\sum \frac{n}{n^2-1}$ ıraksak $[b_n = \frac{1}{n}$ seç K.T **(ii)** uygula!] **(ii)** $x = -2$ için $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ yakınsak [Mutlak-Yak. değil, Alterne seri + Teo4(LeibnitzT.)] $\Rightarrow$ **(i)** ve **(i)** den ***Y.B.*** $= [\mathbf{-2, 2})$

C17: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^{3/2}-1)2^n} x^n$	Önceki soruyla benzer şekilde: $\boldsymbol{R} = \mathbf{2}$, ***Y.B.*** $= [\mathbf{-2, 2}]$

C18: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3n} (x-3)^n$	$\limsup \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = \lim 3 \frac{3n}{3n+3} = 3 \Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ $\|x-3\| < 1/3 \Rightarrow \frac{8}{3} < x < \frac{10}{3}$ **(i)** $x = 10/3$ için $\sum \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n}$ ıraksak **(ii)** $x = 8/3$ için $\sum \frac{(-1)^n}{3n}$ yakınsak [Mutlak-Yak. + Teo3] $\Rightarrow$ **(i)** ve **(i)** den ***Y.B.*** $= \left[\mathbf{-\frac{8}{3}, \frac{10}{3}} \right)$

Önbilgiler: REEL SAYI SERİLERİ

T1 $\left(\textit{Seri}\right)$ **:** $\left(a_n\right)$ reel terimli dizi, $a_1+a_2+\ldots+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{a_n}_{\textit{genel terim}}$

T2 $\left(\begin{matrix}\textit{Kısmi.Top.}\\ \textit{Dizisi}\end{matrix}\right)$ **:** $\left.\begin{matrix} s_1=a_1 \\ s_2=a_1+a_2 \\ \vdots \\ s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n \\ \vdots \end{matrix}\right\}$ şeklindeki $\left(s_n\right):=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$ dizisi.

T3 $\left(\begin{matrix}\textit{Serinin Karakteri}\\ \textit{Yakınsaklık - Iraksaklık}\end{matrix}\right)$ **:**

$\left.\begin{matrix}\left(s_n\right) \text{ yakınsak,} \\ \lim\limits_{n\to\infty} s_n=s\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum a_n$ yakınsak ve $\sum a_n=s$.

$\left(s_n\right)$ ıraksak $\Rightarrow \sum a_n$ ıraksak .

Teo1 $\left(\begin{matrix}\textit{Yakınsaklık için}\\ \textit{bir gerek koşul}\end{matrix}\right)$ **:** $\sum a_n$ yakınsak $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Sonuç1 **:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ ıraksak .

Teo2 **:** $\left.\begin{matrix}\sum a_n \text{ negatif-olmayan terimli} \\ \left(\text{yani her bir } a_n\geq 0\right) \text{ ve} \\ \left(s_n\right) \text{ üstten sınırlı}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum a_n$ yakınsak .

Not1 **:(i)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ \left\{\begin{matrix} p>1 \text{ için yakınsak} \\ \text{diğer durumlar için ıraksak}\end{matrix}\right.$

Ör: $\sum\frac{1}{n}$, $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$: ıraksak ,

$\sum\frac{1}{n^2}$, $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$: yakınsak

Çalışma Soruları –1

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ $\begin{cases} 0<q<1 \text{ için yakınsak} \\ \text{diğer durumlar için ıraksak} \end{cases}$

Üstelik $0<q<1$ için (geometrik seri)

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. ***Ör:*** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$

Negatif-olmayan Terimli Serilerin Karakterlerini Belirlemede Kullanılan Testler:

Kısaltmalar : **K** : *Karakter,* **K-T** : ***Karşılaştırma Testi,*** **D-T** : *D'Alambert Oran Testi*, **C-T** : *Cauchy Kök Testi*

K - T (i) $\sum a_n$ K ? (aradığımız), $\sum b_n$ K-bildiğimiz	$a_n \; \substack{\le \\ \ge} \; b_n \quad (\forall n > m)$ ve $\sum b_n$: $\substack{\text{yakınsak} \\ \text{ıraksak}}$ $\Rightarrow \sum a_n$: $\substack{\text{yakınsak} \\ \text{ıraksak}}$

K - T (ii) $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$	$\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \sum a_n , \sum b_n$ aynı karakterdedir . $\ell = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ yakınsak . $\ell = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak $\Rightarrow \sum a_n$ ıraksak .

D - T (i) $\sum a_n$ K ?	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \; \substack{< \\ \ge} \; 1 \quad (\forall n > m) \Rightarrow \sum a_n$: $\substack{\text{yakınsak} \\ \text{ıraksak}}$

Çalışma Soruları –1

D-T (ii)

$\ell := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

- $\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ yakınsak
- $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ ıraksak
- $\ell = 1 \Rightarrow$ Test sonuç vermez!

C-T (i) $\sum a_n$ K ?	$\sqrt[n]{a_n} \; \begin{matrix} < \\ \geq \end{matrix} \; 1 \quad (\forall n > m) \quad \Rightarrow \sum a_n : \begin{matrix} \text{yakınsak} \\ \text{ıraksak} \end{matrix}$

C-T (ii)

$\ell := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

- $\ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ yakınsak
- $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ ıraksak
- $\ell = 1 \Rightarrow$ Test sonuç vermez!

Ne zaman hangi testi kullanmalı? (Karar verme süreci-Sorular öncesi hazırlık)

Not: Bu gözlemler sonucunda, soruların çözümünü uzun uzadıya yazmadan.. pratik olarak 10 sn içinde doğru test kullanarak serilerin karakterlerini belirleyecek seviyeye gelmelisiniz!

D.T $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \text{ ifadesine dikkat} \right)$: $n!$, q^n, n^α vb. ifadelerde

Ör: $\sum \dfrac{2^n n^2}{(2n)!\, 3^n}$,

C.T $\left(\sqrt[n]{a_n} = a_n^{1/n} \text{ ifadesine dikkat} \right)$: n^n, q^n, n^α vb. ifadelerde

Ör: $\sum \dfrac{2^n}{n^{n^2}}$, $\sum \dfrac{1}{e^n}$

K.T : n^α (ve q^n) ifadelere özellikle dikkat! Bu testle ilgili sorularda daha çok, pay ve payda n^k lı ifadelerden oluşan sorularla karşılaşacağız! Şöyle bir şablon oluşturabilir: paydaki en yüksek dereceli ifade n^α, paydadaki en yüksek dereceli ifade n^β olsun, bu durumda, $\beta-\alpha>1$ ise seri yakınsak diğer durumlarda ıraksak olacaktır ($b_n=\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ seç, **K.T (ii)** uygula ve gör!).

Ör: $\sum \dfrac{n}{(n+1)^2}$ ıraksak , $\sum \dfrac{n}{(n+1)^{5/2}}$ yakınsak, $\sum \dfrac{n+1}{n^3-1}$ yakınsak, $\sum \dfrac{\sqrt{n}+1}{n-1}$ ıraksak.

Not: Bazı sorularda bu testlerin birkaçını kullanıp kolaylıkla sonuca gitmek mümkün olabilir

Ör: $\sum \dfrac{1}{2^n n}$ yakınsak
$$\begin{cases} b_n=\dfrac{1}{2^n} \text{ seç K.T } \textbf{(ii)} \text{ uygula!} \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{2(n+1)}\to\dfrac{1}{2} \text{ , D.T } \textbf{(ii)} \text{ uygula!} \\ \sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{2n^{1/n}}\to\dfrac{1}{2} \text{ , C.T } \textbf{(ii)} \text{ uygula!} \end{cases}$$

Negatif terim de içerebilen Seriler üzerine:

T4 (*Mutlak - yakınsak*) **:** $\sum |a_n|$ yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ mutlak-yakınsak

Teo3 **:** $\sum a_n$ mutlak-yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ yakınsak

T5 (*Alterne Seri*) **:** [terimleri (sıralı olarak) pozitif, negatif şeklinde devam eden seriler]

(u_n) negatif-olmayan terimli,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-\ldots$$

Teo4 (*Alterne seriler için yakınsaklık Leibnitz testi*) **:**
$$\left.\begin{array}{l} \textbf{(i)}\ (u_n) \text{ monoton azalan} \\ \textbf{(ii)}\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \text{ yakınsak}.$$

ÖRNEKLER

(A) *Aşağıdaki serilerin karakterlerini (yakınsak olup olmadıklarını) belirleyiniz.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{2n-1}}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n^2+1}}$ **4.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$

Yanıtlar - Yol Göstermeler

A1 ve A4: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ koşulu sağlanmaz $\underbrace{\Rightarrow}_{\textbf{Sonuç1 den}}$ $\sum a_n$ ıraksak

A2: $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n^2+1}}$ ıraksak ($b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ seç K.T **(ii)** uygula!)

A3: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ yakınsak ($b_n=\dfrac{1}{n^3}$ seç K.T **(ii)** uygula!).

A5: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n\sqrt{n}}$ yakınsak | $b_n=\dfrac{1}{2^n}$ seç K.T **(ii)** uygula!

A6: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$ yakınsak

$$\left\{\begin{array}{l} \sum |a_n| = \sum \dfrac{1}{n(n+2)} \ \text{yakınsak} \\ \left(b_n=\dfrac{1}{n^2}\ \text{seç K.T } \textbf{(ii)} \text{ uygula!}\right) \Rightarrow \text{T4 den} \\ \sum a_n \ \text{mutlak-yakınsak} \ \underbrace{\Rightarrow}_{\textbf{Teo3 den}} \ \sum a_n \ \text{yakınsak} \end{array}\right.$$

Çalışma Soruları –1

T7 $\left(\textit{Kuvvet Serisi}\right)$ **:** $\sum a_n (x-x_0)^n$

T8 $\begin{pmatrix}\textit{Yakınsaklık}\\ \textit{Yarıçapı}\end{pmatrix}$ **:** $\boldsymbol{R=?}$

$$R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R=\frac{1}{\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

T9 $\left(\textit{Yakınsaklık Bölgesi}\right)$ **:** $\boldsymbol{Y.B.}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underbrace{|x-x_0|<R}_{x_0-R<x<x_0+R}\right\}$

***Not2* :(i)** Özel olarak uç noktalar (x_0-R ve x_0+R) için yakınsaklık araştırması yapılır.

(ii) $\begin{cases} R=0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{Y.B.}=\{x\in\mathbb{R}:\ x=x_0\} \\ R=\infty \ \Rightarrow\ \boldsymbol{Y.B.}=\mathbb{R}\end{cases}$