# LİNEER CEBİR DERS NOTLARI

**Ayten KOÇ**

# I
# MATRİSLER

## I.1. Tanım

$F$ bir cisim olmak üzere her $i = 1,2,...,m$ , $j = 1,2,...,n$ için $a_{ij} \in F$ iken

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

şeklinde dikdörtgensel bir tablo $F$ cismi üzerinde bir $m \times n$ *matris* adını alır. $F$ cismi üzerindeki tüm $m \times n$ lik matrisler kümesi $F^{mxn}$ ile gösterilir.

Çoğu kaynak matris için $F$ cisminden söz etmeden, "sayı vb. gibi cebirsel nesnelerin (1) deki gibi oluşturduğu dikdörtgensel bir tabloya $m \times n$-tipinde bir matris denir" tanımını kullanmaktadır. Biz de zorunlu olmadıkça "$F$ cismi üzerinde bir matris" sözü yerine "matris" sözünü kullanacağız.

Matrisler genellikle $A, B, C, ...$ gibi büyük harflerle gösterilir. (1) deki matris $A$ ile gösterilirse her keresinde (1) deki tabloyu yapmak yerine bu matris,

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$$

şeklinde gösterilebilir ve "$A$ , $m \times n$ *-tipinde bir matristir*" diye okunur.

$i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$ olmak üzere $a_{ij}$ ler matrisin elemanlarıdır. (Bazı kaynaklar $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ yerine $A = (a_{ij})_{m,n}$ veya sadece $A = \left[a_{ij}\right]$ gösteriliş biçimini tercih etmektedirler.) $A = [\ a_{ij}\ ]_{m \times n}$ matrisi $m$ satırlı, $n$ sütunlu bir matris olup, $a_{ij}$ elemanının taşıdığı birinci indis elemanın satır numarasını, ikinci indis ise sütun numarasını göstermektedir. Örneğin 2 inci satır elemanları

$$a_{21}\ ,\ a_{22}\ ,\ a_{23}\ ,\ \dots,\ a_{2n}$$

dir. $a_{35}$ ise 3 üncü satır 5 inci sütun elemanıdır. Örneğin,

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

bir 2×3 -matristir. Bu matriste $b_{23} = 8,\ b_{13} = -1$ vb. dir.

### 1.2. Kare Matris

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise *kare matris* adı verilir. $n$ satırlı, $n$ sütunlu bir kare matris genellikle $n$ .mertebeden bir kare matris olarak anılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kare matrisinde

$$a_{11},\ a_{22}\ ,\ a_{33}\ ,\ \ldots,\ a_{nn}$$

elemanlarına $A$ kare matrisinin *esas köşegen elemanları* adı verilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

kare matrisinde esas köşegen elemanları 2, 7, 9 dur.

**Bir Kare Matrisin İzi:** $A$ kare matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamına, $A$ matrisinin izi denir ve İz( $A$ ) ile gösterilir.

Yukarda verilen $A$ matrisinin izi,

$$\text{İz}\,(A) = 2 + 7 + 9 = 18$$

dir.

### 1.3. Satır Matris ( veya Satır Vektörü )

Sadece bir satırlı bir matrise *satır matris* veya *satır vektörü* denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi 5 sütunlu bir satır vektörüdür. Bunu, $1\times5$-tipinde satır matrisi şeklinde okuyabiliriz.

### 1.4. Sütun Matris (Sütun Vektörü)

Sadece bir sütundan oluşan matris bir *sütun matris* (veya *sütun vektörü*) adını alır. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrisi 4 satırlı bir sütun matrisi (vektörü) dir. Bu matris "$4\times1$-tipinde sütun matrisi" şeklinde okunur.

### 1.5. Sıfır Matris

Elemanlarının hepsi sıfır olan matrise sıfır matris denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi bir $2\times3$-tipinde sıfır matristir. Sıfır matris 0 ile gösterilebilir.

$$[0] \ , \ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri birer sıfır matristirler.

### 1.6. Özel Matrisler

#### 1.6.1. Köşegen Matris:

$A = [\ a_{ij}\ ]$ , $nxn$ lik kare bir matris olsun. Her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise $A$ matrisine *köşegen matris* denir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$$

şeklinde gösterilir.

**1.6.2. Skaler Matris:**

Köşegen üzerindeki bütün elemanları aynı skalere eşit olan köşegen matrise *skaler matris* denir.

**1.6.3. Birim Matris:**

Köşegen üzerindeki bütün elemanları 1 e eşit olan skaler matrise *birim matris* denir. $nxn$ lik birim matris $I_n$ ile gösterilir.

**1.6.4. Üst Üçgensel Matris:**

$A$ bir kare matris olmak üzere her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise $A$ matrisine, *üst üçgensel matris* denir.

**1.6.5. Alt Üçgensel Matris:**

$A$ bir kare matris olmak üzere her $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise $A$ matrisine, *alt üçgensel matris* denir.

**1.7. İki Matrisin Eşitliği**

Her ikisi de $m \times n$-matris olan $A = [\ a_{ij}\ ]$, $B = [\ b_{ij}\ ]$ matrislerinde karşılıklı elemanlar eşitse yani her $i$ , $j$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $A$ ve $B$ matrislerine *eşittirler* denir ve $A = B$ yazılır.

**Örnek 1.7.1**

$$A=\begin{bmatrix} x & x-1 & 1 \\ 3 & 5 & y \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & k & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ve $A = B$ olduğuna göre $x, y$ ve $k$ sayılarını belirtelim:

$$
\begin{aligned}
&x = 3 \\
&k = x - 1 = 3 - 1 = 2 \\
&y = 2
\end{aligned}
$$

bulunur.

### 1.8. Bir Matrisin Bir Skaler ile Çarpımı

$A$ bir matris ve $k$ bir skaler olmak üzere $(k \in F)$, $A$ nın her elemanını $k$ ile çarpmakla elde edilen matris $kA$ matrisidir. Yani

$$
k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}
$$

dir. Örneğin,

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad 3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 12 & 0 & 18 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}
$$

dır. $(-1)A$ yerine $-A$ yazılır.

### 1.9. İki Matrisin Toplamı

İki matrisin toplamı $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ olmak üzere

$$
A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}
$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi ancak ve ancak aynı tipte iki matris toplanabilir ve karşılıklı elemanların toplanmasıyla elde edilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x & 2+y & 6 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & -1+z & -2 \end{bmatrix}$$

dir.

## 1.10. İki Matrisin Çarpımı

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$, $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{n\times p}$ olmak üzere $AB = C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ matrisi bir $m \times p$-matris olup $c_{ij}$ elemanları her $i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,\ldots,p$ için

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots a_{in}b_{nj}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi ancak $A$ matrisinin sütun sayısı $B$ matrisinin satır sayısına eşit ise $AB$ çarpımı tanımlıdır.

**Açıklama :**

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$, ve $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{n\times p}$ iken $AB$ matrisinin $i.$satır $j.$sütun elemanını bulmak için $A$ nın $i.$satır elemanlarının $B$ nin $j.$sütun elemanlarıyla karşılıklı olarak çarpılmasının toplamı alınır. Yani $A$ nın $i.$satırı

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{in}$$

$B$ nin $j.$sütunu

$$b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}, \cdots, b_{nj}$$

olup, bunların karşılıklı olarak çarpımlarının toplamı

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

dir. $i = 1,2,\ldots,m$ ve $j = 1,2,\ldots,p$ olduğundan $AB$ matrisi $m \times p$-tipinde bir matristir.

**Örnek 1.10.1**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ -4 & 7\end{bmatrix}$$

iken

$$AB=\begin{bmatrix}2.2+1.3+(-1).(-4) & 2.1+1.0+(-1).7\\ 3.2+2.3+0.(-4) & 3.1+2.0+0.7\\ 4.2+5.3+(-3).(-4) & 4.1+5.0+(-3).7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+3+4 & 2-7\\ 6+6 & 3\\ 8+15+12 & 4-21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -5\\ 12 & 3\\ 35 & -17\end{bmatrix}$$

dir. $AB$ tanımlı olmasına karşın $BA$ tanımlı değildir. Çünkü $B$ nin sütun sayısı 2, $A$ nın satır sayısı 3 ve $2 \neq 3$ tür.

**Örnek 1.10.2**

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.3+(-1).6 & 2.1+(-1).2\\ 6.3+(-3).6 & 6.1+(-3).2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.2+1.6 & 3.(-1)+1.(-3)\\ 6.2+2.6 & 6.(-1)+2.(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -6\\ 24 & -12\end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $AB=0$ ise $A$ veya $B$ nin sıfır matris olması gerekmez. Ayrıca genel olarak $AB \neq BA$ dır.

## 1.11. Toplama ve Skalerle Çarpma ile İlgili Özellikler

$A,B,C$ matrisleri birer m×n-matris ve $k_1$ , $k_2$ birer skaler olmak üzere

**1)** $(A+B)+C = A+(B+C)$ (Toplama işleminin birleşme özelliği)

**2)** $A+B = B+A$ (Toplamaya göre değişme özelliği)

**3)** $A+0 = 0+A = A$

**4)** $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

**5)** $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$

**6)** $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$

özellikleri vardır. Bu özelliklerin ispatları kolay olduğundan burada verilmeyecektir.

**Örnek 1.11.2**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $AX = X + 3B$ eşitliğini gerçekleyen $X$ matrisini belirtelim:

$A$ matrisi 2×2-tipinde, $B$ matrisi 2×1-tipinde birer matris olduğuna göre çarpma ve toplama tanımından $X$ matrisi 2×1-tipinde bir matris olmak zorundadır.

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

diyelim. Buna göre

$$AX = X + 3B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a+b \\ -2a+4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-3 \\ b+15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3a+b &= a-3 \\ 2a+b &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2a+4b&=b+15\\ +2a+3b&=15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4b&=12\\ b&=3 \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} -2a+9&=15\\ -2a&=6\\ a&=-3 \end{aligned}$$

$$X=\begin{bmatrix}-3\\ 3\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

**1.12. Bir Matrisin Transpozesi**

$A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ matrisinin satırlarını aynı numaralı sütun yaparak elde edilen matrise $A$ nın devriği veya $A$ nın *transpozesi* denir. $A$ nın transpozesi $A^t$ veya $A^{'}$ ile gösterilir. $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ in transpozesi bir $n\times m$ matristir.

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 7 & 0\end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad A^t=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 7\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

dir.

**1.13. Toplama ve Çarpma ile İlgili Özellikler**

$A,B,C$ uygun tipte birer matris ve *k* bir skaler olmak üzere

**1)** $(AB)C=A(BC)$

**2)** $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

**3)** $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

**4)** $AB=0$ ise $A$ veya $B$ matrisinin sıfır matris olması gerekmez.

**5)** $AB$ nin tanımlı olması $BA$ nın da tanımlı olmasını gerektirmez.

**6)** $(A+B)^t = A^t + B^t$

**7)** $(AB)^t = B^t A^t$

**8)** $(A^t)^t = A$

**9)** $(kA)^t = kA^t$

dir.

**Simetrik matris:** Tranpozesi, kendisine eşit olan matrise *simetrik matris* denir.

**Ters-simetrik matris:** $A^t = -A$ ise A matrisine ters-simetrik matris denir.

**Problemler:**

1) A ve B simetrik matrisler olsun.

(a) A+B matrisi simetrik bir matristir, ispatlayınız.

(b) AB matrisinin simetrik olması için gerek ve yeter koşul AB=BA olmasıdır, ispatlayınız.

2) (i) c bir skaler olmak üzere $\dot{I}z(cA) = c\,\dot{I}z(A)$

(ii) $\dot{I}z(A+B) = \dot{I}z(A) + \dot{I}z(B)$

(iii) $\dot{I}z(AB) = \dot{I}z(BA)$

olduğunu gösteriniz.

# KAYNAKLAR

**[1]** B. Kolman, D.R. Hill, *Introductory Linear Algebra*, Pearson Prentice Hall, 2005.

**[2]** C. Koç, *Basic Linear Algebra*, Matematik Vakfı, 1995.

**[3]** E. Balkanay, *Lineer Cebir Ders Notları*.

**[4]** J.B.Fraleigh, R.A. Beauregard, Linear Algebra, Addison-Wesley,

**[5]** K.Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice-Hall, 1971.

**[6]** S.H. Friedberg, A.J. Insel, L.E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1989.