Hafta 9:
Laplace Dönüşümü

Ele Alınacak Ana Konular

- Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün yakınsaklık bölgesi
- Ters Laplace dönüşümü
- Laplace dönüşümünün özellikleri
- Laplace dönüşümü kullanarak LTI sistemlerin analizi

Laplace Dönüşümü

- İmpuls yanıtı h(t) olan bir LTI sistemin, e^{st} girişine olan yanıtının $y(t)$ = H(s) e^{st} olduğunu görmüştük (Fourier Serileri, 5.Slayt).
  $H(s)$ aşağıdaki gibi hesaplanıyordu:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

- $s=jw$ için yukarıda verilen integral ifadesi h(t)'nin Fourier dönüşümünü verir. s'in genel karmaşık değişken ($s = \sigma + jw$) olması durumunda integral ifadesine ***Laplace dönüşümü*** denir.

- s karmaşık bir sayı olmak üzere, bir sürekli-zaman işaret $x(t)$'nin Laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

denklemiyle tanımlanır. Laplace dönüşümünü belirtmek için $\mathcal{L}\{x(t)\}$ kullanılacak ve işaret ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişki, aşağıdaki şekilde belirtilecektir.

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

Laplace Dönüşümü

- Laplace dönüşümü ile sürekli-zaman Fourier dönüşümü arasındaki ilişki aşağıda gösterilmiştir.

- $s=jw$ için, $$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \xrightarrow{s=jw} X(jw)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

Dolayısı ile $$X(s)\Big|_{s=jw}=F\{x(t)\}$$

- $s=\sigma+jw$ için,

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \xrightarrow{s=\sigma+jw} X(\sigma+jw)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+jw)t}dt$$

$$X(\sigma+jw)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)e^{-\sigma t}\right]e^{-jwt}dt$$

Bu durumda eşitliğin sağ tarafının $x(t)e^{-\sigma t}$ ‘nin Fourier dönüşümüne eşit olduğu görülür.

Laplace Dönüşümü

- Görüldüğü gibi Laplace dönüşümü, karmaşık *s*-düzleminde jω-ekseni üzerinde hesaplandığında sürekli-zaman Fourier dönüşümünü verir. !!!

$$X(s)\big|_{s=jw} = F\{x(t)\}$$

- $x(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin Fourier dönüşümü de *x(t)* işaretinin Laplace dönüşümünü verir.

- Bu durumda:
  1-) Bir *x*(t) işaretinin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin Fourier dönüşümü yakınsamalıdır. Verilen bir *x(t)* işareti için, Laplace dönüşümünün var olduğu *s* değerleri kümesine YAKINSAKLIK BÖLGESİ (Region of Converge, ROC) denir.

  2-) Eğer ROC imajiner ekseni (s=jω) içeriyorsa, işaretin Fourier dönüşümü de vardır.

  3-) Bazı işaretler için Fourier dönüşümü yakınsamaz iken Laplace dönüşümü yakınsayabilir.

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK 1 : $x(t) = e^{-at}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Bu işaret için Fourier dönüşümü önceki haftalarda aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{a+j\omega}, \qquad a > 0$$

İşaretin Laplace dönüşümü ise,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$X(s)\Big|_{s=\sigma+jw} = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-jwt}dt = \frac{1}{(\sigma+a)+jw}, \qquad \sigma + a > 0$$

veya, $s = \sigma + jw \rightarrow X(s) = \dfrac{1}{s+a}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -a$

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK 2: $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

ÇÖZÜM: $X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-st} u(-t) dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

Not: Önceki örnekte,

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

Laplace Dönüşümü

Örnekler incelediğinde farklı iki işarete ait Laplace dönüşümlerinin cebirsel olarak birbirine eşit olduğu görülür.

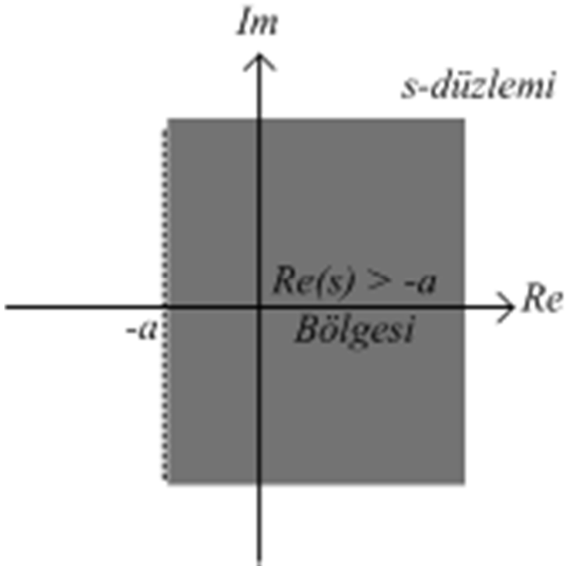
$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

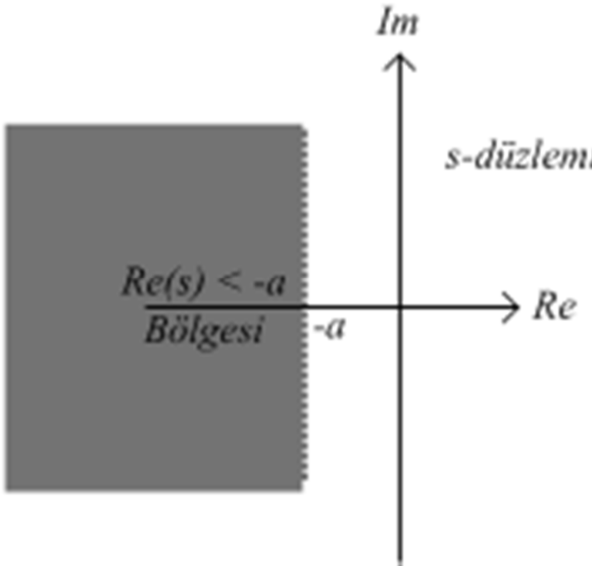
$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

Fakat eşitliklerin geçerli olduğu yakınsaklık bölgesinin
$\{\mathrm{Re}\{s\} < -a\}$ ve $\{\mathrm{Re}\{s\} > -a\}$ birbirinden farklı olduğuna dikkat ediniz.

Bu durumda Laplace dönüşümü için cebirsel ifadenin yanısıra yakınsaklık bölgeside belirtilmelidir.

Laplace Dönüşümü





$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)\right]e^{-s\,t}dt = 3\int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-s\,t}dt - 2\int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-s\,t}dt$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

her iki koşulun sağlandığı bölge…

Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$x(t) = \left[e^{-2t} + e^{-t}\left(\frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2} \right) \right] u(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+3j)t} \right] u(t)$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+(1-3j)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+(1+3j)} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+(1-3j)} = \frac{2s^2+5s+12}{\left(s^2+2s+10\right)(s+2)}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Laplace Dönüşümü

Kutup-Sıfır Dağılımı

Örneklerden görüldüğü gibi reel veya karmaşık üstel işaretlerin doğrusal kombinasyonu olarak tanımlanan işaretin Laplace dönüşümü;

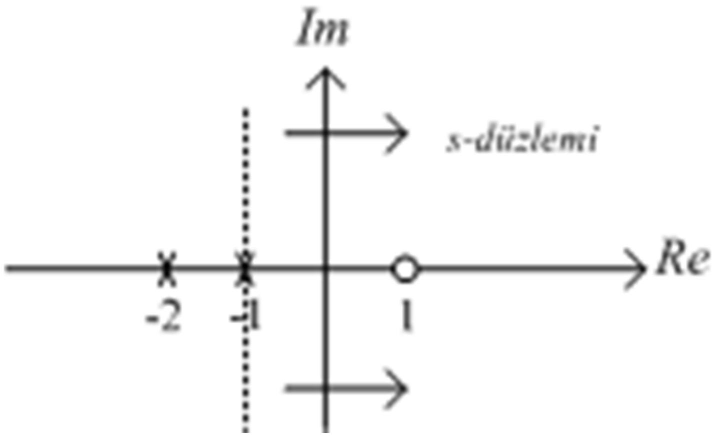
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

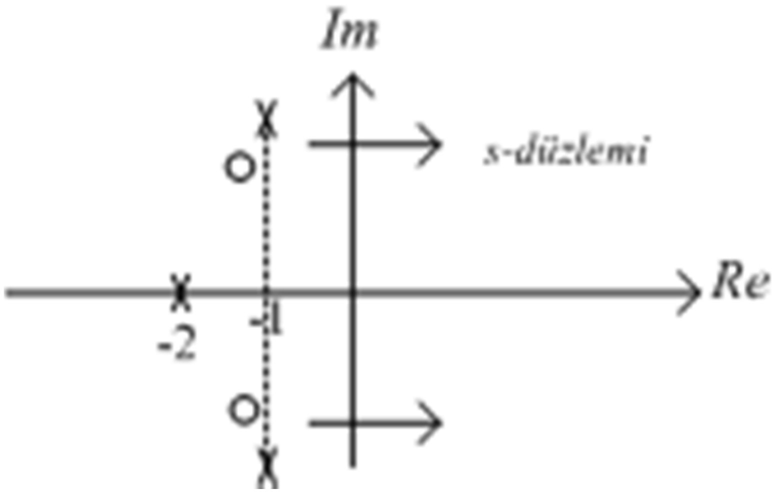
yapısındadır.

Pay $N(s)$ ve payda $D(s)$ için tanımlanan polinomlara ait köklerin s-düzleminde yerine yerleştirilmesi ve ROC bölgesinin tanımlanması Laplace dönüşümünün belirtilmesinde alternatif bir yöntemdir.

Bu tip gösterimde $N(s)$'in kökleri "**o**", $D(s)$'in kökleri ise "**x**" ile belirtilir.

Laplace Dönüşümü





$$X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{\left(s^2+2s+10\right)(s+2)}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

N(s)'in kökleri *X(s)*'in **sıfırları** olarak adlandırılır. Çünkü *s*'in bu değerleri için *X(s) =0* değerini alır. *D(s)*'in kökleri ise **kutup** olarak adlandırılır ve *X(s)* = ∞ *olur*

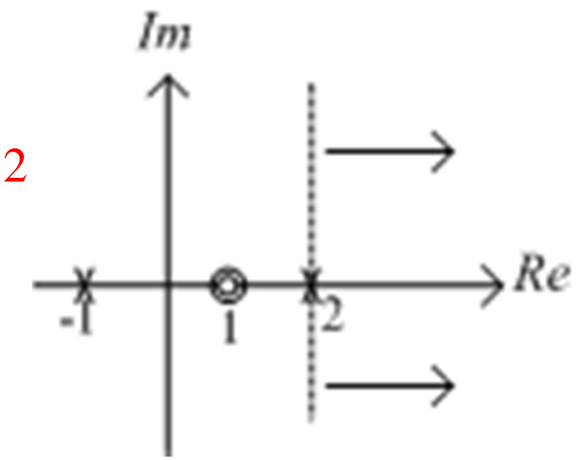
Laplace Dönüşümü

Örnek: $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayınız..

$$\delta(t) \xrightarrow{L} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \qquad \text{ROC ?}$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \qquad e^{2t}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2$$



Soru: $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü için ne söylenebilir?

Laplace Dönüşümü

Özellik 1: Laplace dönüşümü X(s)' e ait ROC jw eksenine paralel bir şerittir.

Daha önce belirtildiği gibi $s = \sigma + jw$ olmak üzere $x(t)$ nin Laplace dönüşümünün var olabilmesi için $x(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin Fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

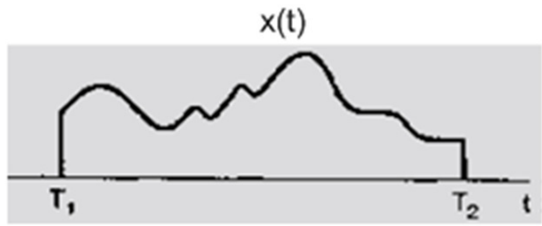
Dolayısı ile koşul sadece s'in gerçel kısmına σ bağlıdır.

Özellik 2: X(s)' e ait ROC kutup içermez.

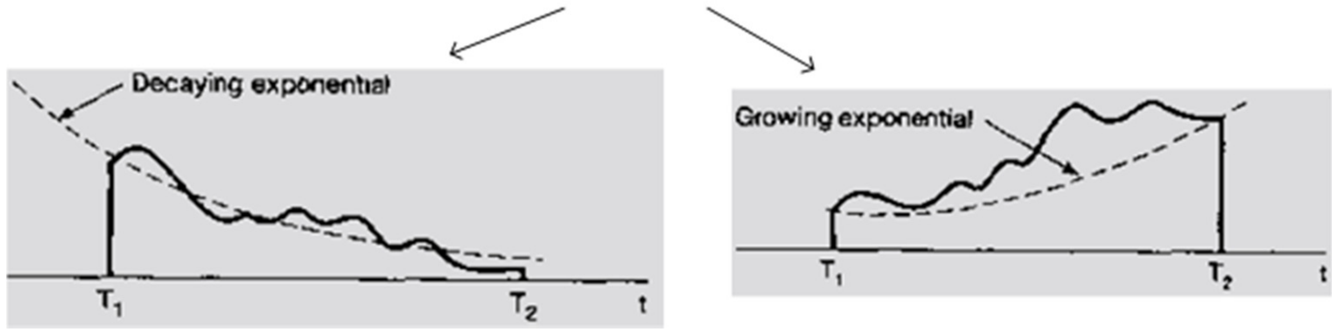
Kutup noktalarında $X(s) = \infty$ olduğundan $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ integrali yakınsamayacaktır.

Laplace Dönüşümü

Özellik 3: *x(t)* sonlu bir işaret ve mutlak integrallenebilir ise X(s)'e ait ROC tüm *s*-düzlemidir.



$$x(t)e^{-\sigma t}$$



Laplace Dönüşümü

Örnek: $x(t)=\begin{cases} e^{-at} & 0<t<T \\ 0 & diğer \end{cases}$ işaretinin Laplace dönüşümünü hesaplayıp ROC bölgesinin tüm *s* düzlemi olduğunu gösteriniz.

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-s\,t}dt=\int_{0}^{T} e^{-at}e^{-s\,t}dt=\frac{1}{s+a}\left(1-e^{-(s+a)T}\right)$$

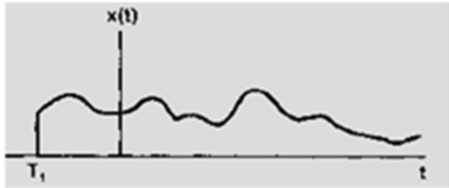
Görüldüğü gibi *X(s)*'in *s=-a* noktasında kutbu vardır. Kutup noktaları ROC'a dahil olamazdı.. (Özellik 2).
Ancak *s=-a* ‘da *X(s)*=0/0 olduğundan *s=-a* noktasındaki değeri L'Hôpital kuralı ile hesaplanır ise

$$\lim_{s\to -a} X(s)=\lim_{s\to -a}\frac{\frac{d}{ds}\left(1-e^{-(s+a)T}\right)}{\frac{d}{ds}\left(s+a\right)}=\lim_{s\to -a}\mathrm{T}\,e^{-aT}e^{-sT}=T$$

$X(-a)=T$ olduğundan ROC tüm *s* düzlemidir.

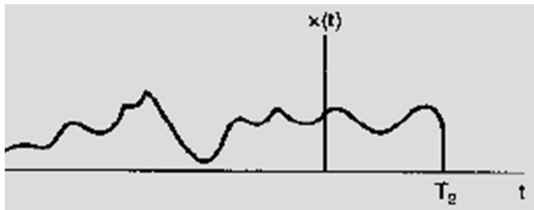
Laplace Dönüşümü

Özellik 4: *x(t)* sağ tarafa dayalı bir işaret ise ve *Re{s}*= σ_0 ROC bölgesinde ise *Re{s}*> σ_0 şartını sağlayan tüm *s* noktalarıda ROC alanındadır.



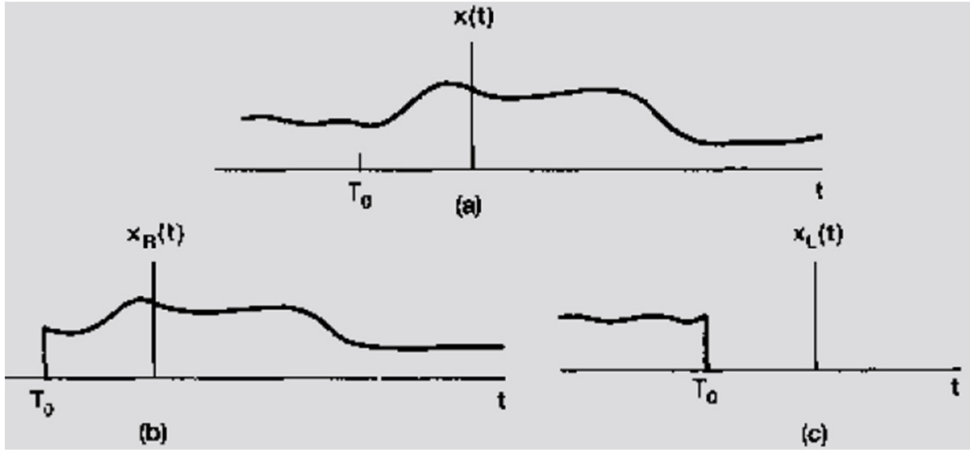
$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ ise $\sigma_0 < \sigma_1$ şartını sağlayan σ_1 içinde $\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$ geçerli olacaktır.

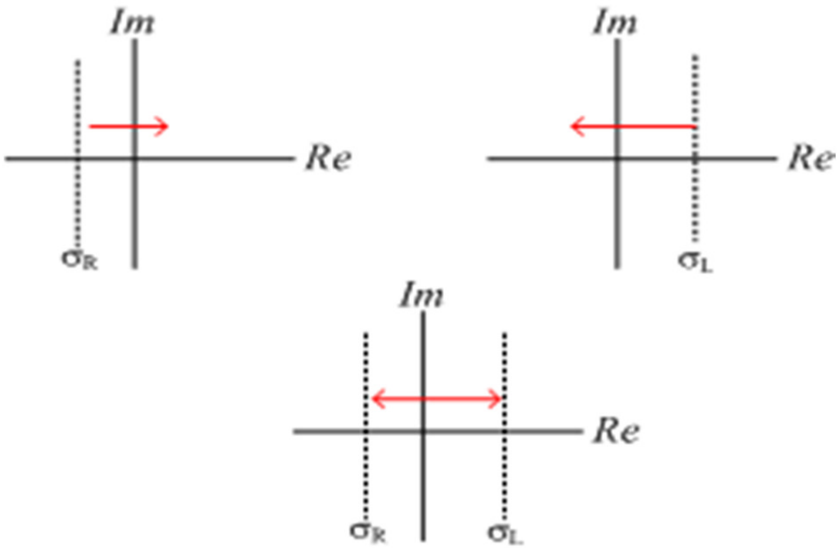
Özellik 5: *x(t)* sol tarafa dayalı bir işaret ise ve *Re{s}*= σ_0ROC bölgesinde ise *Re{s}* < σ_0 şartını sağlayan tüm *s* noktalarıda ROC alanındadır.



Laplace Dönüşümü

Özellik 6: *x(t)* çift taraflı bir işaret ise ve $Re\{s\}=\sigma_0$ ROC bölgesinde ise *x(t)* için ROC $Re\{s\}=\sigma_0$ da içeren bir şerit şeklindedir.

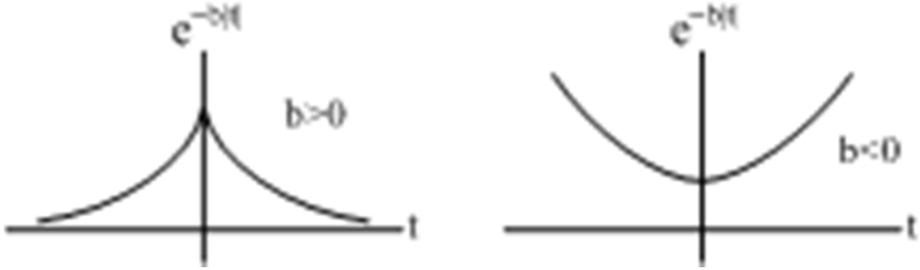




Laplace Dönüşümü

ÖRNEK: $x(t) = e^{-b|t|}$ işaretinin Laplace dönüşümünü (mevcut ise) hesaplayınız.

$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$ şeklinde yeniden yazılır ve i) b>0 ii) b<0 durumlarına göre aşağıda gösterilen iki işaret elde edilir.



$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} \quad \text{Re}\{s\} > -b \qquad\qquad e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{-1}{s-b} \quad \text{Re}\{s\} < +b$$

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2} \qquad -b < \text{Re}\{s\} < b$$

Görüldüğü gibi ayrı ayrı bakıldığında b'nin tüm değerleri için (b>0, b<0) hem sağ taraf hem de sol tarafa dayalı işaretin Laplace dönüşümü mevcuttur. Ancak x(t) için sadece b>0 için Laplace dönüşümü mevcuttur.

Laplace Dönüşümü

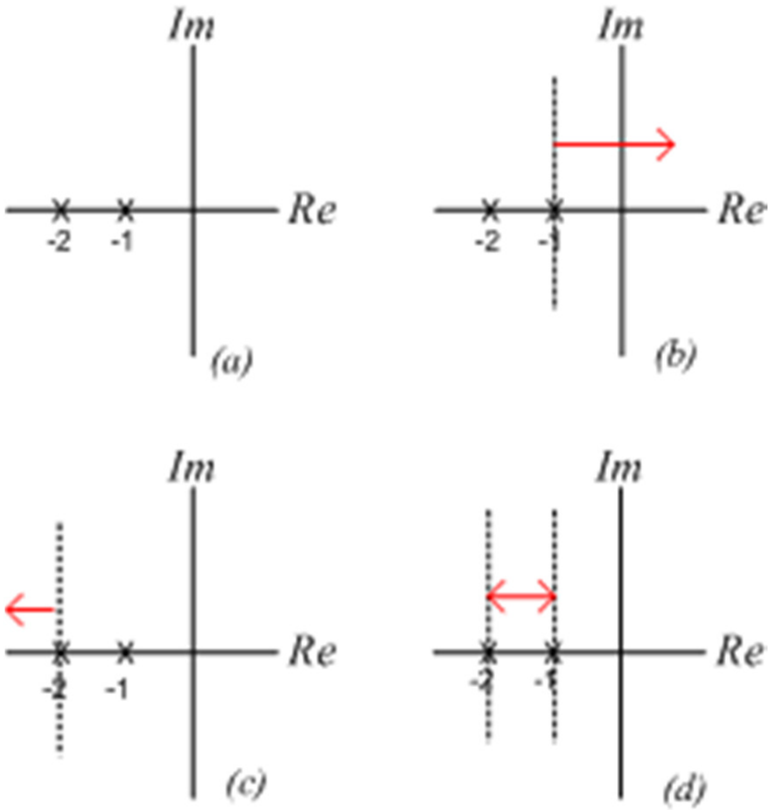
Özellik 7: *x(t)*'ye ait Laplace dönüşümü oransal ise ROC ya kutuplar ile sınırlıdır veya sonsuza kadar uzanır.

Özellik 8: *x(t)* sağ tarafa dayalı ve Laplace dönüşümü oransal ise ROC en sağdaki kutbun sağ tarafıdır.

x(t) sol tarafa dayalı ve Laplace dönüşümü oransal ise ROC en soldaki kutbun sol tarafıdır.

Laplace Dönüşümü

Örnek: $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ ifadesi için kutup sıfır dağılımını çiziniz ve mümkün olan ROC bölgelerini gösteriniz.



Ters Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü *X(s)* olan *x(t)* işareti aşağıda belirtilen ters-Laplace ifadesi ile hesaplanabilir.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$$

Ancak yukarıda verilen integrali hesaplamak yerine *X(s)* ifadesi basit kesirlere ayrılarak her bir bileşeni için ayrı ayrı ters-Laplace dönüşümü tablodan bakılarak hesaplanması daha kolay bir yöntemdir.

Örnek: $X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\mathrm{Re}\{s\}>-1$ olarak verilmiştir. *x(t) = ?*

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+2)}$$

$$A=\left[(s+1)X(s)\right]_{s=-1}=1 \qquad B=\left[(s+2)X(s)\right]_{s=-2}=-1$$

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

Ters Laplace Dönüşümü

Hatırlatma: $$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

Bu durumda $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{(s+1)} - \dfrac{1}{(s+2)}$ $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ ifadesi için ters-laplace;

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+1)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \qquad e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+2)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$\left[e^{-t} - e^{-2t}\right]u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

olarak hesaplanır.

Ters Laplace Dönüşümü

Örnek: $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2$ olarak verilmiştir. *x(t) = ?*

$$-e^{-at}u(-t)\xrightarrow{L} X(s)=\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-a \qquad e^{-at}u(t)\xrightarrow{L} X(s)=\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

Bu durumda $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)}\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2$ ifadesi için ters-laplace;

$$-e^{-t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+1)}\quad \mathrm{Re}\{s\}<-1 \qquad -e^{-2t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+2)}\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2$$

$$\left[-e^{-t}+e^{-2t}\right]u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+1)(s+2)}\quad \mathrm{Re}\{s\}<-1$$

olarak hesaplanır.

Ters Laplace Dönüşümü

Örnek: $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\quad -2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$ olarak verilmiştir. $x(t)=?$

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{L} X(s)=\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-a \qquad e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} X(s)=\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

Bu durumda $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{(s+1)}-\dfrac{1}{(s+2)}$ $\quad -2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$ ifadesi için ters-laplace;

$$-e^{-t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+1)}\quad \mathrm{Re}\{s\}<-1 \qquad e^{-2t}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+2)}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$-e^{-t}u(-t)+e^{-2t}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+1)(s+2)}\qquad -2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$$

olarak hesaplanır.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 1: Doğrusallık

$x_1(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X_1(s)$ ve $\mathrm{ROC}=\mathrm{R}_1$

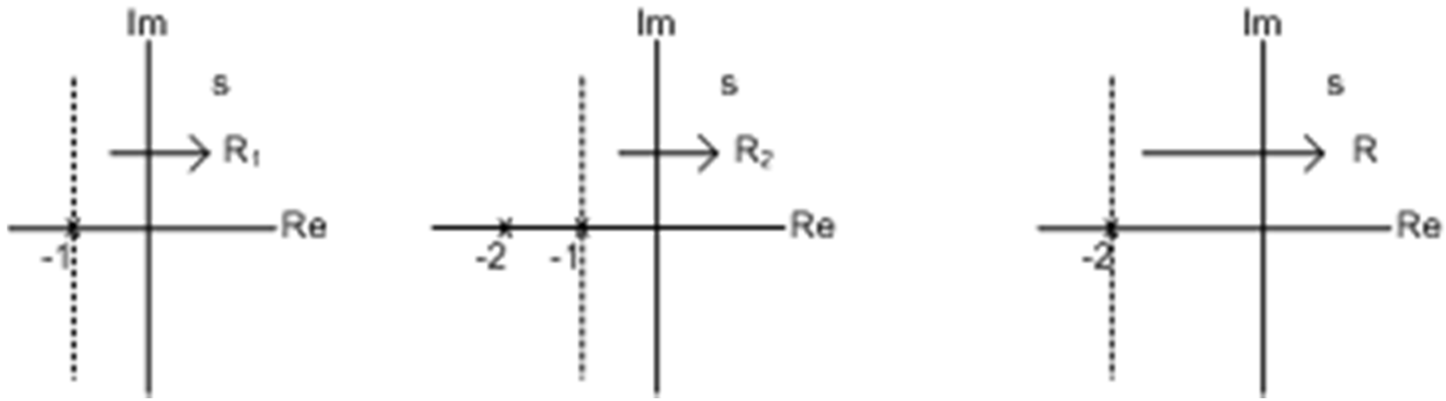
$x_2(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X_2(s)$ ve $\mathrm{ROC}=\mathrm{R}_2$

$$ax_1(t)+bx_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{aX}_1(\mathrm{s})+\mathrm{bX}_2(\mathrm{s}) \qquad \text{ROC en az } \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$$

Örnek: $X_1(s)=\dfrac{1}{s+1}$ $\mathrm{Re}\{\mathrm{s}\}>-1$ ve $X_2(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\mathrm{Re}\{\mathrm{s}\}>-1$ olsun.

$x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ olarak verildiğine göre $X(s)=?$

$$X(s)=X_1(s)-X_2(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\}>-2$$



Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 2: Zamanda Öteleme

$$x(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC=R} \qquad ise \qquad x(\mathrm{t\text{-}t_0}) \xrightarrow{L} \mathrm{e}^{-st_0} X(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC=R}$$

Özellik 3: s-domeninde Öteleme

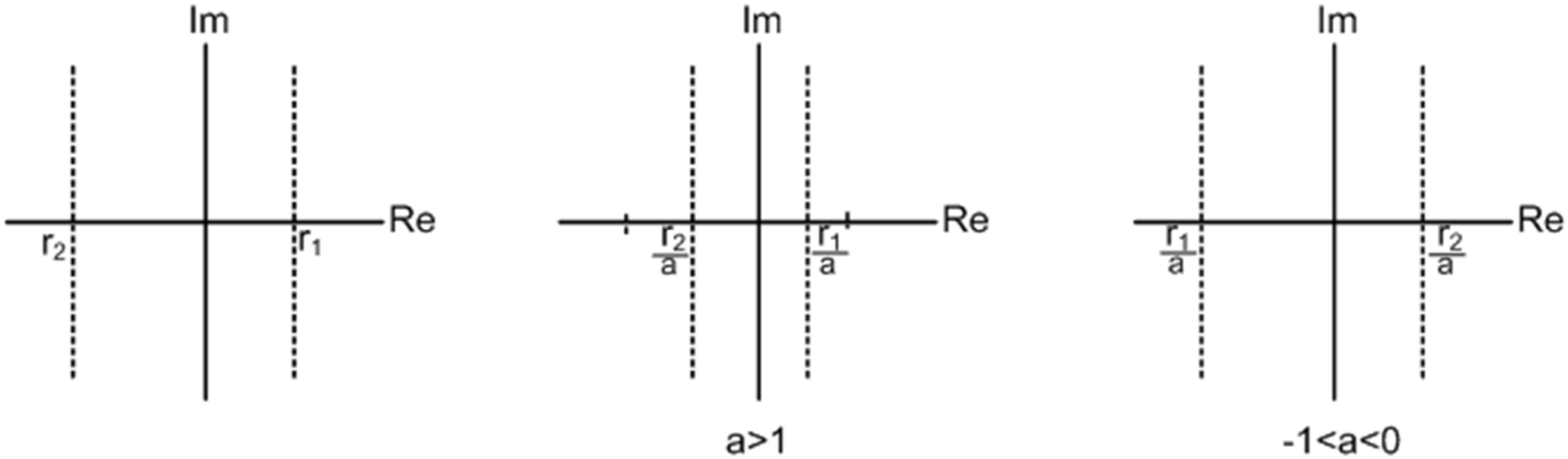
$$x(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC=R} \qquad ise$$

$$\mathrm{e}^{s_0 t} x(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X(s - s_0) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC=R+Re}\{s_0\}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 4: Zamanda Ölçekleme

$$x(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC{=}R} \quad \textit{ise} \quad x(\mathrm{at}) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC\ R_1} = \frac{R}{a}$$



Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 5: Konvolüsyon Özelliği

$$x_1(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X_1(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC{=}R_1}$$

$$x_2(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X_2(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC{=}R_2}$$

$$x_1(\mathrm{t})*x_2(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X_1(s).X_2(s) \quad \mathrm{ROC{=}}\ \mathrm{R_1} \cap \mathrm{R_2}\ \text{içerir}$$

$$X_1(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\} > -1 \quad ve \quad X_2(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\} > -2$$

$$X_1(s).X_2(s) = 1 \quad ROC = tüm \quad s - düzlemi$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 6: Zaman Domeninde Türev Özelliği

$$x(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC{=}R} \quad ise$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC} \quad \text{R'yi içerir.}$$

Özellik 7: s-domeninde Türev Özelliği

$$x(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC{=}R} \quad ise$$

$$-tx(\mathrm{t}) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds} \quad \text{ve} \quad \mathrm{ROC{=}R}$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Örnek: $x(\mathrm{t}) = te^{-at}u(t)$ Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \qquad \text{Re}\{s\}>-a$$

$$te^{-at}u(t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \text{Re}\{s\}>-a$$

Örnek: $X(s) = \dfrac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)} \qquad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$x(t) = \left[2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}\right]u(t)$$

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik 8: Zaman Domeninde İntegral Özelliği

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC=R} \qquad ise$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s}X(s) \quad \text{ve} \quad \text{ROC} \quad \text{R} \cap \text{Re\{s\}>0}$$

İlk (Başlangıç) Değer Teoremi: $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

Son Değer Teoremi: $x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Nedensellik

Nedensel LTI sistem için impuls cevabı $h(t) = 0$ $t<0$'dır.
Dolayısı ile nedensel sistemin impuls cevabı sağ tarafa dayalıdır. Bu durumda <u>nedensel bir sistemin transfer fonksiyonu *H(s)* için ROC sağ taraflıdır.</u>

Oransal bir transfer fonksiyonuna *H(s)* sahip nedensel sistemin ROC'u en sağdaki kutbun sağ tarafıdır.

Örnek: İmpuls cevabı $h(t) = e^{-t}u(t)$ olan sistemi inceleyelim.

$h(t)=0$ $t<0$ olduğundan sistem nedenseldir.

Transfer fonksiyonu $H(s) = \dfrac{1}{s+1} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$

incelendiğinde ROC'un en sağdaki kutbun sağ tarafı olduğu görülmektedir.

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: İmpuls cevabı $h(t) = e^{-|t|}$ olan sistemi inceleyelim.

$h(t) \neq 0$ $t < 0$ olduğundan sistem nedensel değildir.

Transfer fonksiyonu $H(s) = \dfrac{-2}{s-1}$ $-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$

incelendiğinde ROC'un en sağdaki kutbun sağ tarafı olmadığı görülmektedir.

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: Transfer fonksiyonu $H(s)=\dfrac{e^{s}}{s+1}$ $\mathrm{Re}\{s\}>-1$ olarak verilen sistemi

inceleyelim.

Transfer fonksiyonu için ROC en sağdaki kutbun sağ tarafı olarak verilmiştir. Dolayısı ile impuls cevabı sağ taraflı olmalıdır.

Önceki örneklerden $e^{-t}u(t)\xrightarrow{L}\dfrac{1}{s+1}$ Re{s}>-1

ve Laplace dönüşümü özelliklerinden, $e^{-(t+1)}u(t+1)\xrightarrow{L}\dfrac{e^{s}}{s+1}$ Re{s}>-1

Bu durumda incelenen sistemin impuls cevabı $h(t)=e^{-(t+1)}u(t+1)$
olarak elde edilir. Dolayısı ile sistem nedensel değildir.

Nedensel sistem için ROC en sağdaki kutbun sağıdır. Ancak ROC'un en sağdaki kutbun sağı olması sistemin nedensel olmasını garanti etmez. Sadece impuls cevabının sağ taraflı olduğunu kesinleştirir.

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Kararlılık

LTI sistemin kararlı olabilmesi için impuls cevabının h(t) mutlak integrallenebilir olması gerekir. Başka bir ifade ile impuls cevabının Fourier dönüşümü yakınsamalıdır.

$$F\{x(t)\} = X(jw) = \{X(s)\}_{s=jw}$$ olduğundan,

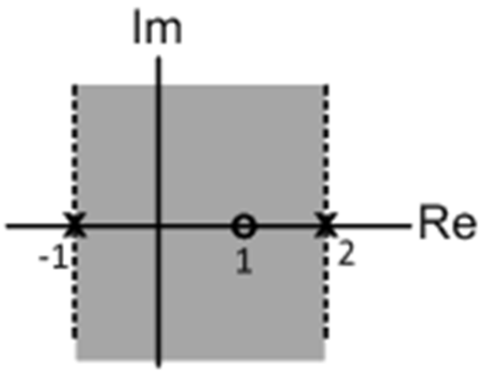
LTI bir sistemin kararlı olabilmesi için sistem transfer fonksiyonuna ait ROC bölgesi *jw*- eksenini kapsamalıdır.

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

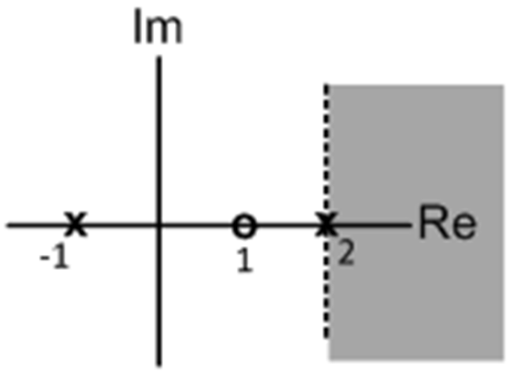
Örnek: Transfer fonksiyonu $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$ olarak verilen sistemin

kararlılığını inceleyelim.

ROC bölgesi belirtilmediği için mümkün olan tüm ROC bölgeleri için sistemin kararlılığını inceleyelim.

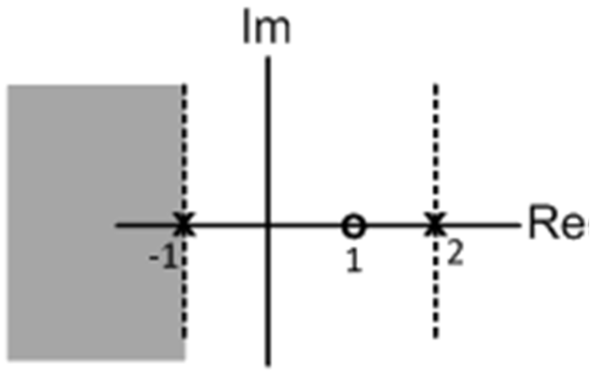


$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$



Nedensel

$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$



$$h(t)=-\frac{2}{3}e^{-t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

<u>Nedensel</u> bir sistemin <u>kararlı</u> olabilmesi için transfer fonksiyonunun tüm kutupları <u>sol s-yarı düzleminde</u> olmalıdır.

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Giriş-çıkış ilişkisi diferansiyel denklem ile verilen LTI bir sistemin transfer fonksiyonu Laplace dönüşümü özellikleri kullanılarak doğrudan elde edilebilir.

Örnek: $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad \rightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

$$Nedensel \quad \rightarrow \ \text{Re}\{\text{s}\}\text{>-3} \ \rightarrow \quad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$Anti-Nedensel \quad \rightarrow \quad \text{Re}\{\text{s}\}\text{<-3} \ \rightarrow \ h(t) = -e^{-3t}u(-t)$$

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek: $x(t) = e^{-3t}u(t)$ giriş işaretine karşılık cevabı $y(t) = \left[e^{-t} - e^{-2t}\right]u(t)$

olan sistemin transfer fonksiyonunu elde ediniz. Sistemin giriş-çıkış ilişkisini tanımlayan diferansiyel denklemi yazınız. Sistemin nedenselliği ve kararlılığını belirtiniz.

$$X(s) = \frac{1}{s+3} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -3 \qquad Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad \text{ROC ?}$$

H(s)'in ROC'u için 3 alternatşf söz konusudur. Ancak, konvolüsyon özelliğinden Y(s) 'in ROC'u nun X(s) ve H(s)'in ROC'u nun kesişimini içermesi gerektiğini biliyoruz. Bu durumda H(s)'in ROC'u Re{s} >-1 olmalıdır. Dolayısı ile sistem nedensel ve kararlıdır.

Sistemin davranışını tanımlayan diferansiyel denklem:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

LTI Sistemlerin Laplace Dönüşümü ile Analizi

Örnek:Bir sistem hakkında aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

1. Sistem nedenseldir.
2. Transfer fonksiyonu oransaldır ve s=-2 ve s = 4 'te olmak üzere iki kutba sahiptir.
3. x(t) = 1 için y(t) = 0 olarak elde edilmiştir.
4. İmpuls cevabı $t = 0^+$ → 4 olarak hesaplanmıştır.

Buna göre *H(s) = ?*

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)}$$

$x(t) = 1 = e^{0t}$ için y(t)=0 olabilmesi için $Y(s) = X(s).H(s)$

ilişkisinden H(0)=0 olması gerektiği anlaşılır, $p(s) = sq(s)$

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \quad \to \quad \lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s\to\infty} \frac{Ks^2}{s^2} = 4 \Rightarrow K = 4$$

$$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$