

## 2. Bölüm

### **Doğrusal, Zamanla Değişmeyen Sistemler**

#### **2.1. GİRİŞ**

Sistemlerin iki önemli özelliği doğrusallık ve zamanla değişmezlikdir. Bu bölümde bu özelliklere sahip olan sistemlerin temel giriş-çıkış ilişkisi geliştirilecektir. DZD sistemler için bu giriş-çıkış ilişkisinin bir konvolüsyon işlemi cinsinden tanımlandığı gösterilecektir. DZD sistemlerde konvolüsyon işleminin önemi; DZD bir sistemin birim dürtü girişine olan tepkisinin bilinmesinin herhangi bir giriş sinyaline olan tepkisini bulma olanağını bize vermesinden kaynaklanmaktadır. DZD sistemler için giriş-çıkış ilişkilerinin türevsel ve fark denklemleri ile tanımlanması da incelenecaktır.

#### **2.2. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİSİ VE KONVOLÜSYON ENTEGRALİ**

##### **A. Dürtü Tepkisi:**

$T$  ile gösterilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisi, giriş  $\delta(t)$  olduğundaki sistem tepkisi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle:

$$h(t) = T\{\delta(t)\} \quad (2.1)$$

##### **B. Herhangi Bir Girişe olan Tepki:**

Eşitlik (1.27)'den  $x(t)$  girişi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.2)$$

olarak ifade edilebilir. Sistem doğrusal olduğundan sistemin herhangi bir girişe olan tepkisi de

$$\begin{aligned} y(t) &= T\{x(t)\} = T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) T\{\delta(t - \tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca, sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h(t - \tau) = T\{\delta(t - \tau)\} \quad (2.4)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.4), Eşitlik (2.3)'de yerine konursa

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.5)$$

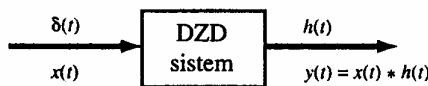
elde edilir. (2.5) eşitliği sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisi ile tümüyle tanımlandığını göstermektedir.

### C. Konvolüsyon Entegrali:

Eşitlik (2.5); sürekli zamanlı iki adet  $x(t)$  ve  $h(t)$  sinyalinin

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

ifadesi ile verilen konvolüsyonunu tanımlar. (2.6) eşitliği yaygın olarak konvolüsyon entegrali olarak bilinir. O halde, ulaşılan temel sonuç; herhangi bir sürekli zamanlı, DZD sistemin çıkışı,  $x(t)$  girişi ile sistemin dürtü tepkisi  $h(t)$ 'nin konvolüsyonudur. Şekil 2-1 dürtü tepkisinin tanımını ve Eşitlik (2.6)'daki ilişkiyi sergilemektedir.



**Şekil 2-1** Sürekli Zamanlı DZD Sistem

### D. Konvolüsyon Entegralinin Özellikleri:

Konvolüsyon entegrali aşağıdaki özelliklere sahiptir.

#### 1. Yer değiştirmə:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (2.7)$$

#### 2. Birleşim:

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \quad (2.8)$$

#### 3. Dağılım:

$$x(t) * \{h_1(t)\} + h_2(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (2.9)$$

### E. Konvolüsyon Entegral İşlemi:

Konvolüsyonun yer değiştirme özelliği (2.7), Eşitlik (2.6)'ya uygulanırsa

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \quad (2.10)$$

elde edilir. Konvolüsyonu Eşitlik (2.6) yerine Eşitlik (2.10) ile bulma çoğu kez daha kolaydır. Konvolüsyon işleminin (Eşitlik 2.6) aşağıdaki dört adımdan oluştuğu görülmektedir.

1.  $h(\tau)$  dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek (orijine göre yansıtılıarak)  $h(-\tau)$  elde edilir. Daha sonra  $t$  parametrelili,  $\tau$ 'nın bir fonksiyonu olan  $h(t-\tau) = h[-(\tau - t)]$ 'yi oluşturmak için  $t$  birim kaydırılır.
2.  $t$  parametresi sabit tutularak  $x(\tau)$  ve  $h(t-\tau)$  sinyalleri,  $\tau$ 'nın tüm değerleri için çarpılır.

3.  $y(t)$  çıkışının tek bir değerini üretmek için  $x(\tau)h(t-\tau)$  çarpımı tüm  $\tau$  için entegre edilir.
4.  $y(t)$  çıkışının tüm değerlerini üretmek için  $t$ 'nin  $-\infty$ 'dan  $+\infty$ 'a kadar olan değerleri ile 1-3 adımları tekrarlanır.

Yukarıdaki konvolüsyon işlemine ilişkin örnekler Prob. 2.4-2.6'da verilmiştir.

#### F. Basamak Tepkisi:

$T$  ile gösterilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $s(t)$  basamak tepkisi; giriş  $u(t)$  olduğundaki sistem tepkisi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle:

$$s(t) = T\{u(t)\} \quad (2.11)$$

Çoğu uygulamalarda  $s(t)$  basamak tepkisi de yararlı bir sistem tanımdır. Eşitlik (2.10) kullanılarak  $s(t)$  basamak tepkisi kolayca saptanabilir.

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

O halde,  $h(t)$  dürtü tepkisi entegre edilirse  $s(t)$  basamak tepkisi elde edilir. Eşitlik (2.12)'nin  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (2.13)$$

olduğu görülür. O halde,  $s(t)$  basamak tepkisinin türevi alınarak  $h(t)$  dürtü tepkisi elde edilebilir.

### 2.3. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

#### A. Bellekli ya da Belleksiz Sistemler:

Belleksiz bir sistemin  $y(t)$  çıkışı yalnızca o andaki  $x(t)$  girişine bağımlı olduğundan, doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistem için bu ilişki yalnızca aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y(t) = Kx(t) \quad (2.14)$$

Burada  $K$  sistem kazancı olup bir sabittir. Dolayısıyla, sisteme ilişkin  $h(t)$  dürtü tepkisi aşağıdaki sade ilişki ile tanımlanır.

$$h(t) = K\delta(t) \quad (2.15)$$

Sonuç olarak, eğer  $t \neq 0$  için  $h(t) \neq 0$  ise sürekli zamanlı, DZD sistem belleklidir.

#### B. Nedensellik:

Bölüm 1.5 D'de açıklandığı üzere bir olay gerçekten oluşana kadar nedensel bir sistem bu giriş olayına tepki vermez. Bu nedenle nedensel, DZD bir sistem için

$$h(t) = 0 \quad t < 0 \quad (2.16)$$

(2.16) nedensellik koşulunu Eşitlik (2.10)'a uygulayarak, nedensel, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (2.17)$$

Ya da (2.16) nedensellik koşulunu Eşitlik (2.6)'ya uygulayarak  $y(t)$  için şu alternatif ifade bulunur.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.18)$$

Eşitlik (2.18) göstermektedir ki,  $y(t)$  çıkışını hesaplamak için kullanılan  $x(t)$  girişinin değerleri yalnızca  $\tau \leq t$  koşulunu sağlayan giriş değerleridir. (2.16) koşuluna dayanarak, eğer:

$$x(t) = 0 \quad t < 0 \quad (2.19a)$$

ise bir  $x(t)$  sinyali nedenseldir, eğer

$$x(t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.19b)$$

ise nedensel değildir. Bu durumda, Eşitlik (2.17), (2.18) ve (2.19a) kullanılarak nedensel bir  $x(t)$  giriş'i için nedensel, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.20)$$

### C. Kararlılık:

DZD bir sistemin SGSÇ (Sınırlı giriş/sınırlı çıkış) kararlılığı (Bölüm 1.5H), onun dürtü tepkisinden kolayca irdelenebilir. Eğer dürtü tepkisi mutlak entegre edilebilir ise, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (2.21)$$

koşulu sağlanıyor ise, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin SGSÇ anlamında kararlı olduğu gösterilebilir (Prob. 2.13).

## 2.4. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

Bölüm 1 (Prob. 1.44)'de,  $T$  ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD sistemlerin özfonksiyonlarının,  $s$  bir karmaşık değişken olmak üzere,  $e^{st}$  biçimindeki karmaşık fonksiyonlar olduğu belirlenmiştir. Bu durumda,

$$T\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \quad (2.22)$$

olup, burada  $\lambda$ ,  $T$ 'nin  $e^{st}$ ye ilişkin özdeğeridir. Eşitlik (2.10)'da  $x(t) = e^{st}$  koyarak

$$\begin{aligned} y(t) &= T\{e^{st}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} \\ &= H(s) e^{st} = \lambda e^{st} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\text{bulunur. Burada} \quad \lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (2.24)$$

O halde, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $e^{st}$  özfonksiyonuna ilişkin özdegeri karmaşık bir sabit olan  $H(s)$  olup değeri,  $s$ 'nin ilgili değeri kullanılarak Eşitlik (2.24) ile hesaplanır. Eşitlik (2.23)'den  $y(0) = H(s)$  olduğuna dikkat ediniz. (bkz. Prob. 1.44).

Yukarıdaki sonuçlar Bölüm 3 ve 5'de incelenen Laplace ve Fourier dönüşüm tanımlarının temelini oluşturmaktadır.

## 2.5. TÜREVSEL DENKLEMLERLE TANIMLANAN SİSTEMLER

### A. Doğrusal, Sabit Katsayılı Türevsel Denklemler:

$N$ . mertebeden, doğrusal, sabit katsayılı, genel bir türevsel denklem

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (2.25)$$

birimde verilmiş olsun. Burada  $a_k$  ve  $b_k$  katsayıları gerçek sabitlerdir. Eşitlik (2.25)'de  $N$ ,  $y(t)$ 'nin en yüksek türev derecesini gösterir. Bu tür türevsel denklemler; elektrik, mekanik, kimyasal ve biyolojik alanlardaki farklı sistemlere ilişkin giriş-çıkış ilişkilerini tanımlamada önemli bir rol üstlenir. Örneğin Prob. 1.32'deki RC devresinde  $x(t)=v_s(t)$  girişi ve  $y(t)=v_c(t)$  çıkışı, birinci mertebeden, sabit katsayılı bir denklem ile ilişkilendirilebilir [Eşitlik (1.105)].

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

Belirli bir  $x(t)$  girişi için Eşitlik (2.25)'in genel çözümü

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (2.26)$$

birimde olup,  $y_p(t)$ , Eşitlik (2.25)'i sağlayan bir özel çözüm,  $y_h(t)$  ise aşağıdaki homojen türevsel denklemi sağlayan bir homojen (ya da komplimenter) çözümüdür.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \quad (2.27)$$

$y_h(t)$ 'nin kesin biçimini  $N$  adet yardımcı koşul belirler. Yardımcı koşullar tanımlamadan Eşitlik (2.25)'in,  $y(t)$  çıkışını  $x(t)$  cinsinden tümüyle belirlemediğine dikkat ediniz. Genel olarak, bu yardımcı koşullar

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

değişkenlerinin belirli bir  $t$  anındaki değerleridir.

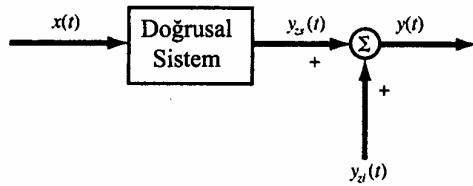
### B. Doğrusallık:

Eğer yardımcı koşulların tümü sıfır ise Eşitlik (2.25) ile tanımlanan sistem doğrusaldır (bkz. Prob. 2.21). Eğer yardımcı koşullar sıfır değilse, sistemin  $y(t)$  tepkisi

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (2.28)$$

birimde ifade edilebilir. Burada;  $y_{zi}(t)$ , sistemin verilen yardımcı koşulların ilişkin sıfır giriş tepkisi,  $y_{zs}(t)$ , ise sıfır yardımcı koşullara sahip, doğrusal bir sistemin sıfır durum tepkisidir [Şekil 2.2].

$y_{zi}(t) \neq y_h(t)$  ve  $y_{zs}(t) \neq y_p(t)$  olduğuna dikkat ediniz. Genel olarak  $y_{zi}(t)$ ,  $y_h(t)$ 'yi,  $y_{zs}(t)$  ise hem  $y_h(t)$ 'yi hem de  $y_p(t)$ 'yi içermektedir (bkz. Prob. 2.20).



Şekil 2.2 Sıfır durum ve sıfır giriş tepkileri

### C. Nedensellik:

Eşitlik (2.25) ile tanımlanan bir doğrusal sistemin nedensel olması için başlangıçta durgun olmak koşulunu (ya da ilk enerjisiz olma koşulu) varsaymamız gereklidir. Diğer bir deyişle,  $t \leq t_0$  için  $x(t)=0$  ise yine  $t \leq t_0$  için  $y(t)=0$  olduğunu varsayıyorsunuz (Prob. 1.43). Bu durumda  $t > t_0$  için tepki aşağıdaki başlangıç koşullarını kullanarak Eşitlik (2.25)den hesaplanabilir.

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

Burada:

$$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0}$$

Açıkça görülmektedir ki başlangıçta durgun olan bir sistemde  $y_{zi}(t) = 0$ 'dır.

### D. Zamanla Değişmezlik:

Bir doğrusal nedensel sisteme başlangıçta durgunluk onun zamanla değişmezliğini de ima eder (Prob. 2.22).

### E. Dürtü Tepkisi:

Eşitlik (2.25) ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisi, başlangıçta durgun olma koşuluyla birlikte aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \quad (2.29)$$

Dürtü tepkisini hesaplama örnekleri Prob. (2.29) ve (2.24)'de verilmiştir. Daha sonraki bölümlerde dürtü tepkisi dönüşüm teknikleri kullanılarak bulunacaktır.

## 2.6. AYRIK ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİSİ VE KONVOLÜSYON TOPLAMI

### A. Dürtü Tepkisi:

$T$  ile gösterilen ayrik zamanlı, DZD bir sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisi (ya da birim örnek tepkisi), girişe  $\delta(n)$  uygulandığı zamanki tepkisi olarak şöyle tanımlanır:

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad (2.30)$$

### B. Herhangi Bir Girişe Tepki:

Eşitlik (1.53)'den  $x[n]$  girişi

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (2.31)$$

olarak ifade edilebilir. Sistem doğrusal olduğundan sistemin herhangi bir  $x[n]$  girişine olan  $y[n]$  tepkisi

$$\begin{aligned} y[n] &= T\{x[n]\} = T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

olarak ifade edilebilir. Sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h[n-k] = T\{\delta[n-k]\} \quad (2.33)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.33), Eşitlik (2.32)'de yerine konarak

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad (2.34)$$

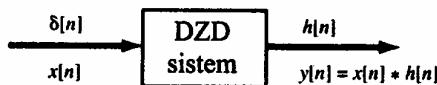
elde edilir. (2.34) eşitliği göstermektedir ki ayrik zamanlı, DZD bir sistem,  $h(n)$  dürtü tepkisi ile tümüyle tanımlanmaktadır.

### C. Konvolüsyon Toplamlı

Eşitlik (2.5); iki adet  $x[n]$  ve  $h[n]$  dizisinin

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad (2.35)$$

ifadesi ile verilen konvolüsyonunu tanımlar. (2.35) eşitliği yaygın olarak konvolüsyon toplamı olarak bilinir. O halde, yine ulaşılan temel sonuç; herhangi bir ayrik zamanlı, DZD sistemin çıkışı,  $x[n]$  girişi ile sistemin dürtü tepkisi  $h[n]$ 'nin konvolüsyonudur. Şekil 2.3 dürtü tepkisinin tanımını ve Eşitlik (2.35)'deki ilişkiye sergilemektedir.



Şekil 2.3 Ayrik zamanlı, DZD sistem

### D. Konvolüsyon Toplamanın Özellikleri:

Konvolüsyon toplamın aşağıdaki özellikleri Böl.(2.3)'de bahsedilen konvolüsyon entegralinin özelliklerinin karşılığı olan özelliklerdir.

**1. Yer değiştirmeye:**

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (2.36)$$

**2. Birleşim:**

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} \quad (2.37)$$

**3. Dağılım:**

$$x[n] * \{h_1[n]\} + h_2[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (2.38)$$

**E. Konvolüsyon Toplamına İlişkin İşlem:**

Yine, konvolüsyon toplamın yer değiştirme özelliği Eşitlik (2.35)'e uygulanırsa

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (2.39)$$

elde edilir. Bu işlem, Eşitlik (2.35) ile hesaplamaya kıyasla çoğu kez daha kolaydır. Sürekli zamanlı sistemlerde olduğu gibi konvolüsyon toplamı [Eşitlik (2.35)] aşağıdaki dört adımdan oluşur:

1.  $h[k]$  dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek (orijine göre yansıtılıarak)  $h[-k]$  elde edilir. Daha sonra  $n$  parametreli,  $k$ 'nın bir fonksiyonu olan  $h[n-k]=h[-(k-n)]$ 'yi oluşturmak için  $n$  birim kaydırılır.
2.  $n$  parametresi sabit tutularak  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  dizileri  $k$ 'nın tüm değerleri için çarpılır.
3.  $y[n]$  çıkışının tek bir değerini üretmek için  $x[k] h[n-k]$  çarpımı tüm  $k$  için çarpılır.
4.  $y[n]$  çıkışının tüm değerlerini üretmek için  $n$ 'nin  $-\infty$ 'dan  $+\infty$ 'a kadar olan değerleri için 1-3 adımları tekrarlanır.

Yukarıdaki konvolüsyon toplamı işlemine ilişkin örnekler Prob.(2.28) ve (2.30)'da verilmiştir.

**F. Basamak Tepkisi:**

$h[n]$  dürtü tepkisi ile tanımlanan ayrik zamanlı, DZD bir sistemin  $s[n]$  basamak tepkisi Eşitlik (2.39) kullanılarak kolayca bulunur.

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (2.40)$$

Eşitlik (2.40)'dan

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \quad (2.41)$$

olduğu görülmektedir. Eşitlik (2.40) ve (2.41), Eşitlik (2.12) ve (2.13)'ün ayrik zamanlı karşılıklarıdır.

**2.7. AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ****A. Bellekli ya da Belleksiz Sistemler:**

Belleksiz bir sistemin  $y[n]$  çıkışı yalnızca o andaki  $x[n]$  girişine bağımlı olduğundan, doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistem için bu ilişki yalnızca aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y[n] = Kx[n] \quad (2.42)$$

Burada  $K$ , sistem kazancı olup bir sabittir. Dolayısıyla, sisteme ilişkin dürtü tepkisi aşağıdaki sade ilişki ile tanımlanır.

$$h[n] = K\delta[n] \quad (2.43)$$

Sonuç olarak, eğer  $n_0 \neq 0$  için  $h[n_0] \neq 0$  ise ayrik zamanlı, DZD sistem belleklidir.

### B. Nedensellik:

Sürekli zamanlı durumda olduğu gibi ayrik zamanlı, DZD bir sistem için nedensellik koşulu:

$$h[n] = 0 \quad n < 0 \quad (2.44)$$

(2.44) ile verilen nedensellik koşulu Eşitlik (2.39)'a uygulanırsa, nedensel DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi ifade edilir..

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (2.45)$$

Ya da (2.44) nedensellik koşulunu denkl. (2.35)'e uygulayarak şu alternatif ifade bulunur.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] \quad (2.46)$$

(2.46) eşitliği göstermektedir ki,  $y[n]$  çıkışını hesaplamak için kullanılan  $x[n]$  girişinin değerleri yalnızca  $k \leq n$  koşulunu sağlayan giriş değerleridir.

Sürekli zamanlı durumda olduğu gibi eğer

$$x[n] = 0 \quad n < 0 \quad (2.47a)$$

ise bir  $x[n]$  girişi nedensel, eğer

$$x[n] = 0 \quad n \geq 0 \quad (2.47b)$$

ise nedensel değildir. O halde, bir nedensel  $x[n]$  girişi için nedensel, ayrik zamanlı, DZD bir sistemin  $y[n]$  çıkış şöyle olacaktır:

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] \quad (2.48)$$

### C. Kararlılık:

Eğer dürtü tepkisi mutlak toplanabilir ise, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (2.49)$$

koşulu sağlanıyor ise, ayrik zamanlı DZD bir sistemin SGSÇ anlamında kararlı olduğu gösterilebilir.

## 2.8. AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

Bölüm 1 (Prob. 1.45)'de,  $T$  ile tanımlanan ayrik zamanlı, DZD sistemlerin özfonsiyonlarının,  $z$  bir karmaşık değişken olmak üzere,  $z^n$  biçimindeki karmaşık fonksiyonlar olduğu belirlenmişti. Bu durumda,

$$T\{z^n\} = \lambda z^n \quad (2.50)$$

olup, burada  $\lambda$ , T'nin  $z^n$ 'ye ilişkin özdeğeridir. Eşitlik (2.39)'da  $x[n] = z^n$  koyarak

$$\begin{aligned} y[n] &= T\{z^n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \right] z^n \\ &= H(z) z^n = \lambda z^n \end{aligned} \quad (2.51)$$

bulunur. Burada:

$$\lambda = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \quad (2.52)$$

O halde, ayrik zamanlı, DZD bir sistemin  $z^n$  özfonsiyonuna ilişkin özdeğeri karmaşık bir sabit olan  $H(z)$  olup değeri,  $z$ 'nin ilgili değeri kullanılarak Eşitlik (2.252) ile hesaplanır. Eşitlik (2.51)'den  $y[0] = H(z)$  olduğuna dikkat ediniz (bkz. Prob.1.45).

Yukarıdaki sonuçlar Böl. 4. ve 6'da açıklanan  $z$  dönüşümünün ve ayrik zamanlı Fourier dönüşümünün tanımlarının temelini oluşturmaktadır.

## 2.9. FARK DENKLEMLERİYLE TAŞIMLANAN SİSTEMLER

Türevsel denklemlerin sürekli zamanlı sistemleri tanımlamada üstlendiği rol, ayrik zamanlı sistemleri tanımlamada fark denklemlerince üstlenilir.

### A. Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleri:

(2.25) genel türevsel denkleminin ayrik zamandaki karşıtı  $N$ . mertebeden doğrusal, sabit katsayılı aşağıdaki denklemidir.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.53)$$

Burada  $a_k$  ve  $b_k$  gerçek sabitleridir.  $N$  mertebesi Eşitlik (2.53)'deki  $y[n]$ 'nin en büyük gecikme değeridir. Doğrusal, sabit katsayılı fark denklemlerinin sınıfına yönelik bir örnek Bölüm 1 (Prob. 1.37)'de verilmiştir. Sürekli zamandakine karşı olarak Eşitlik (2.53)'ün çözümü ve doğrusallık, nedensellik ve zamanla değişmezlik gibi tüm sistem özelliklerini; türevsel denklemlerin incelenmesindeki tekniklere paralel teknikler izlenerek incelenebilir. Eğer sistem başlangıçta durgun durumda ise Eşitlik (2.53) ile tanımlanan sistemin nedensel ve DZD olduğu tekrar vurgulanmalıdır.

### B. Tekrarlı Çözüm:

Eşitlik (2.53)'ün daha basit bir alternatif çözümü, bu denklemin yeniden düzenlenmesi ile elde edilir.

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad (2.54)$$

Bu formül bize  $n$  anındaki çıkışın o andaki giriş ile daha önceki giriş ve çıkış değerleri cinsinden hesaplanması olanağını vermektedir. Yardımcı koşullara gereksinim Eşitlik (2.54)'den açıkça görülmektedir.  $n = n_0$ 'dan başlayarak  $y[n]$ 'yi hesaplamak için  $n \geq n_0 - M$  için  $x[n]$  girişine ek olarak  $y[n_0-1], y[n_0-2], \dots, y[n_0-N]$  değerleri de bilinmelidir. Çıkış giriş ve daha önceki çıkışlar cinsinden hesaplayan tekrarlı bir yöntem olması nedeniyle Eşitlik (2.54) ile verilen genel ifade bir tekrarlı denklem olarak bilinir.

$N = 0$  için Eşitlik (2.53)

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right\} \quad (2.55)$$

tekrarlı olmayan bir denkleme dönüşür. Çünkü, çıkışın şimdiki değerini hesaplamak için çıkışın eski değerleri gerekmez. Bu durumda  $y[n]$ 'nin hesabı için yardımcı koşullara gereksinim yoktur.

### C. Dürtü Tepkisi:

Sürekli zamanlı sistemin farklı olarak Eşitlik (2.53) ya da eşdeğer biçimde Eşitlik (2.54) ile tanımlanan ayrik zamanlı, DZD bir sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisi aşağıdaki eşitlikle kolayca saptanabilir.

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k] \right\} \quad (2.56)$$

Eşitlik (2.55) ile tanımlanan sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisi ise

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n/a_0 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.57)$$

birimdedir. Bu sistem için dürtü tepkisinin sonlu sayıda terimden oluştuğuna dikkat ediniz. Diğer bir deyişle yalnızca sonlu bir zaman süresince tepki sıfırdan farklıdır. Bu özellik nedeniyle Eşitlik (2.55) ile tanımlanmış bir sistem sonlu dürtü tepkili (FIR) sistem olarak bilinir. Diğer taraftan, sonsuz zaman süresince tepkisi sıfırdan farklı olan bir sistem de sonsuz dürtü tepkili (IIR) sistem olarak bilinir. Dürtü tepkisinin bulunmasına ilişkin örnekler Prob.2.44 ve 2.45'de çözülmüştür. Dönüşüm tekniklerini kullanarak dürtü tepkisinin bulunması Bölüm 4'de incelenecaktır.

## Çözümlü Problemler

### SÜREKLİ ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİLERİ VE KONVOLÜSYON

**2.1.** Aşağıda tekrarlanan Eşitlik (2.7) ve (2.8)'in doğruluğunu gösteriniz.

- (a)  $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- (b)  $\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$
- (c) Tanim (2.6) uyarınca

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

yazılabilir. Bu ifadede  $t-\tau=\lambda$  değişken değişikliği yapılrsa

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda = h(t) * x(t)$$

(b)  $x(t) * h_1(t) = f_1(t)$  ve  $h_1(t) * h_2(t) = f_2(t)$  alınırsa

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_1(t - \tau) d\tau$$

ve  $\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = f_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\sigma) h_2(t - \sigma) d\sigma$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_1(\sigma - \tau) d\tau \right] h_2(t - \sigma) d\sigma$$

yazılabilir.  $\lambda = \sigma - \tau$  konarak ve entegral almanın sırası değiştirilerek

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda) h_2(t - \tau - \lambda) d\lambda \right] d\tau$$

elde edilir.

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda) h_2(t - \lambda) d\lambda$$

olduğundan aşağıdaki oluşturulabilir.

$$f_2(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda) h_2(t - \tau - \lambda) d\lambda$$

$$\begin{aligned} \text{O halde } \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) * f_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \end{aligned}$$

## 2.2. Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (2.58)$$

$$(b) x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (2.59)$$

$$(c) x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.60)$$

$$(d) x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau \quad (2.61)$$

(a) Tanım (2.6) ve Eşitlik 1.22)'den yararlanılır.

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(\tau)|_{\tau=t} = x(t)$$

(b) Eşitlik 2.7) ve (1.22)'den yararlanılır.

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \delta(t - t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) x(t - \tau) d\tau \\ &= x(t - \tau)|_{\tau=t_0} = x(t - t_0) \end{aligned}$$

(c) Eşitlik 2.6) ve (1.19)'dan yararlanılır.

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Çünkü:  $u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$

(d) Benzer biçimde:

$$x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau$$

Çünkü:  $u(t - \tau - t_0) = \begin{cases} 1 & \tau < t - t_0 \\ 0 & \tau > t - t_0 \end{cases}$

**2.3.**  $y(t) = x(t) * h(t)$  ise

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2) \quad (2.62)$$

olduğunu gösteriniz.

Eşitlik (2.6)'dan

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.63a)$$

ve  $x(t - t_1) * h(t - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_1) h(t - \tau - t_2) d\tau \quad (2.63b)$

yazılabilir.  $\tau - t_1 = \lambda$  olsun. Eşitlik (2.63b)'de  $\tau = \lambda + t_1$  konarak

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - t_1 - t_2 - \lambda) d\lambda \quad (2.63c)$$

elde edilir. Eşitlik (2.63a) ve Eşitlik (2.63c)'nin kıyaslanması sonucu Eşitlik (2.63a)'da  $t$  yerine  $t - t_1 - t_2$  koymakla Eşitlik (2.63c)'nin elde edilebileceği görülmektedir.

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$$

**2.4.** Sürekli Zamanlı, DZD bir sistemin  $x(t)$  girişi ve  $h(t)$  dörtü tepkisi

$$x(t) = u(t); \quad h(t) = e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0 \text{ olarak verilmiştir.}$$

(a) Eşitlik (2.6)'yı kullanarak  $y(t)$ 'yi hesaplayınız.

(b) Eşitlik (2.10)'u kullanarak  $y(t)$ 'yi hesaplayınız.

(a) Eşitlik (2.6)'yı kullanarak

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

bulunur.  $t < 0$  ve  $t > 0$  için  $x(\tau)$  ve  $h(t - \tau)$  fonksiyonları Şekil 2-41(a)'da gösterilmiştir. Burada  $t < 0$  için  $x(\tau)$  ve  $h(t - \tau)$ 'nın örtüşmediği,  $t > 0$  için ise  $\tau = 0$  ve  $\tau = t$  aralığında örtüşlüğü görülmektedir. Bu nedenle  $t < 0$  için  $y(t) = 0$  olup  $t > 0$  için  $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} d\tau \\ &= e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

olduğundan,  $y(t)$  çıkışı şöyle ifade edilebilir.

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t) \quad (2.64)$$

(b) Eşitlik (2.10) kullanılarak

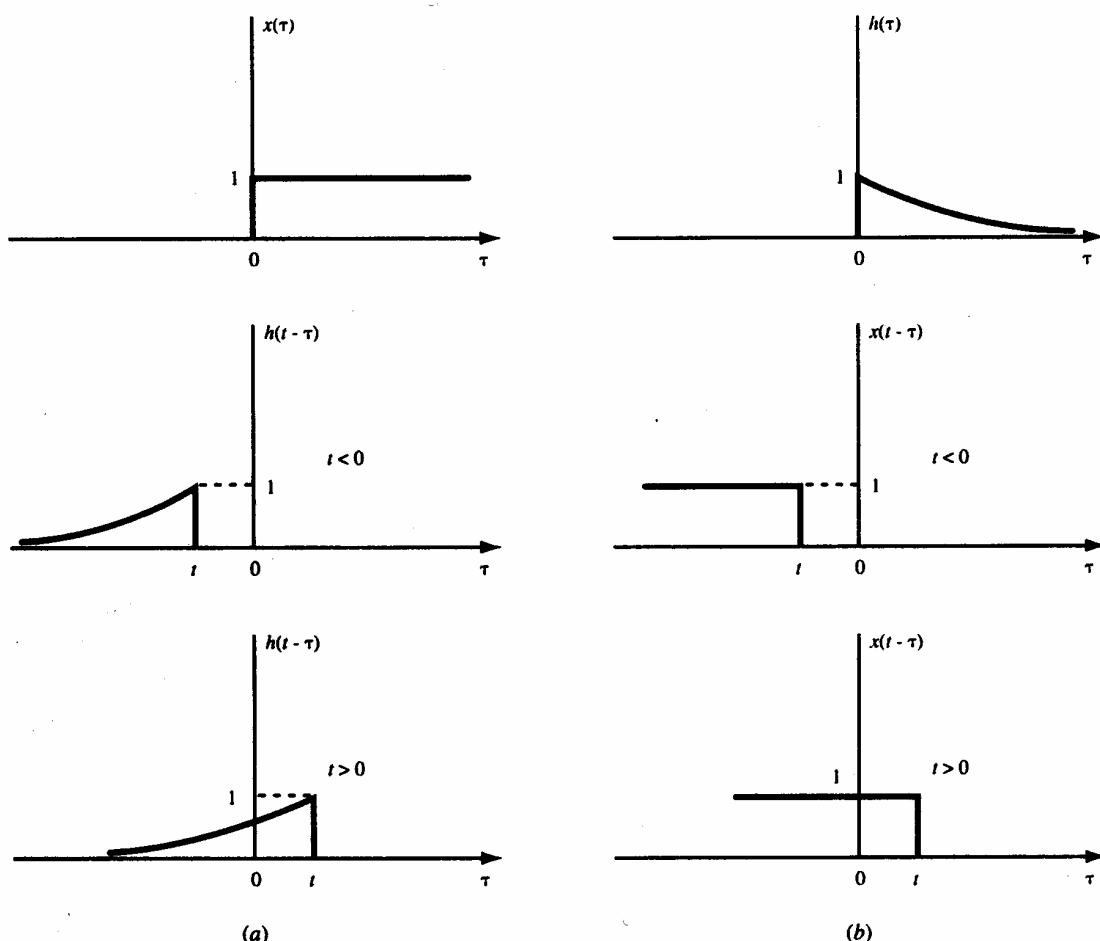
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

bulunur.  $t < 0$  ve  $t > 0$  için  $h(t)$  ve  $x(t - \tau)$  fonksiyonları Şekil 2-4(b)'de gösterilmiştir. Burada da  $t < 0$  için  $h(\tau)$  ve  $x(t - \tau)$ 'nun örtüşmediği,  $t > 0$  için ise  $\tau = 0$  ve  $\tau = t$  aralığında örtüştüğü görülmektedir. Bu nedenle,  $t < 0$  için  $y(t) = 0$  olup  $t > 0$  için  $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

olduğundan,  $y(t)$  çıkışı şöyle ifade edilebilir ki, bu, Eşitlik (2.64) ile verilenin aynısıdır.

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t) \quad (2.65)$$



Şekil 2-4

- 2.5.  $h(t)$  dürtü tepkisi ve  $x(t)$  girişi aşağıda verilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $y(t)$  çıkışını hesaplayınız.

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad x(t) = e^{\alpha t} u(-t) \quad \alpha > 0$$

Eşitlik (2.6) kullanılarak

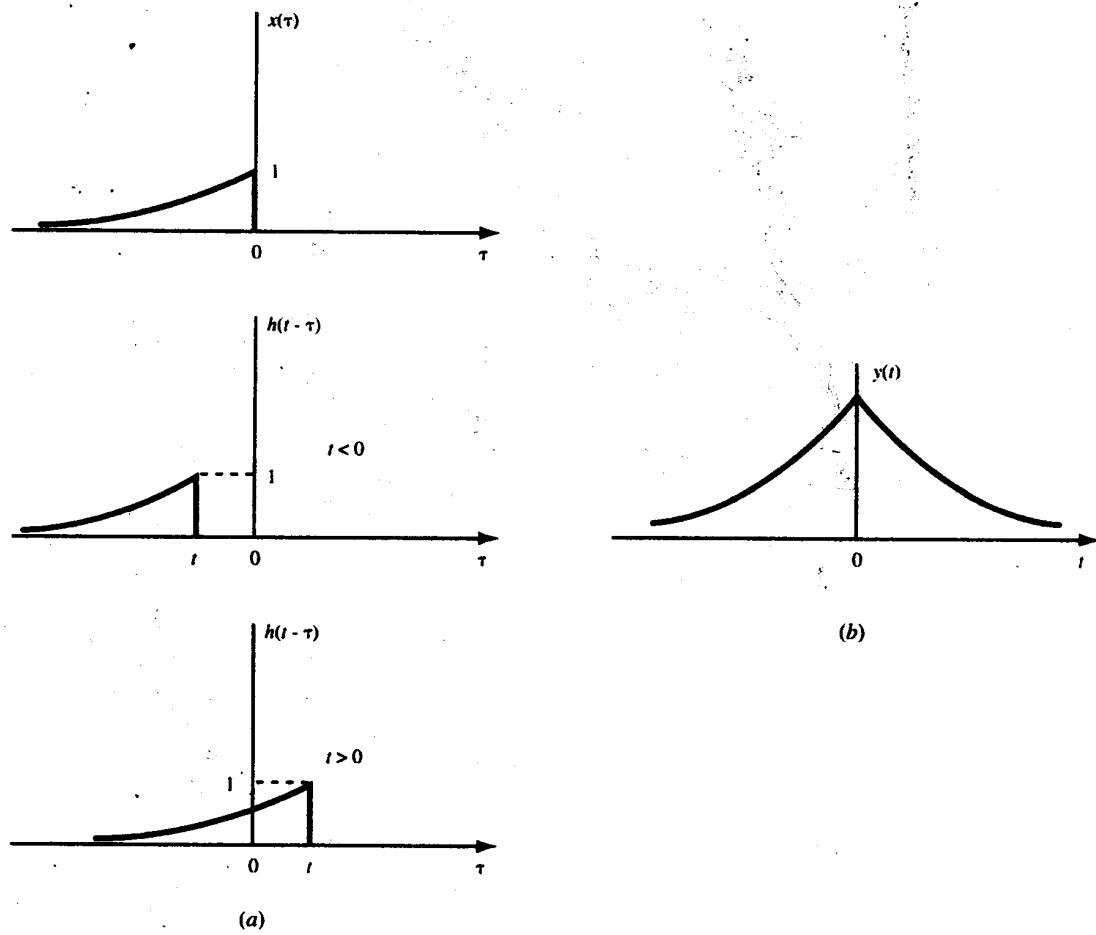
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

yazılır.  $t < 0$  ve  $t > 0$  için çizimleri Şekil 2.5(a)'da verilen  $x(\tau)$  ve  $h(t - \tau)$  fonksiyonlarının,  $t < 0$  için  $\tau = -\infty$  ve  $\tau = t$ ,  $t > 0$  için ise  $\tau = -\infty$  ve  $\tau = 0$  aralıklarında örtüştüğü görülmektedir. O halde  $t < 0$  için

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{\alpha \tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{2\alpha \tau} d\tau = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t} \quad (2.66a)$$

ve  $t > 0$  için

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha \tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha \tau} d\tau = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t} \quad (2.66b)$$

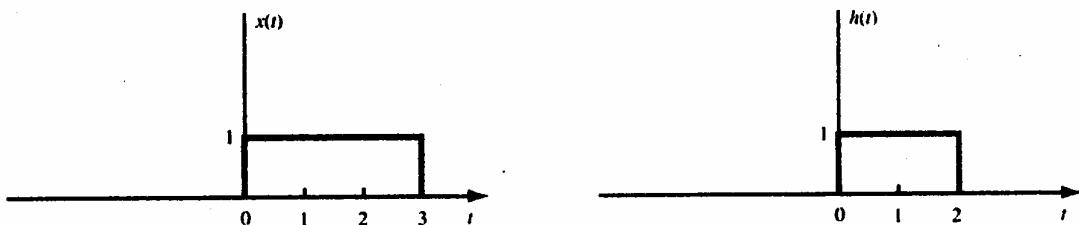


Şekil 2-5

yazılabilceğinden Eşitlik (2.66a) ve (2.66b) birleştirilerek  $y(t)$  aşağıdaki gibi oluşturulabilir [Şekil 2-5(b)].

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \quad \alpha > 0 \quad (2.67)$$

- 2.6.**  $x(t)$  ve  $h(t)$  Şekil 2-6'daki gibi verilmiş ise  $y(t) = x(t)*h(t)$  işlemlerini (a) analitik yöntemle, (b) grafiksel yöntemle yapınız.



Şekil 2-6

- (a) Önce  $x(t)$  ve  $h(t)$  analitik biçimde ifade edilir.

$$x(t) = u(t) - u(t-3) \quad h(t) = u(t) - u(t-2)$$

Daha sonra Eşitlik (2.6) kullanılır.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-3)][u(t-\tau) - u(t-\tau-2)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-2-\tau) d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-2-\tau) d\tau \end{aligned}$$

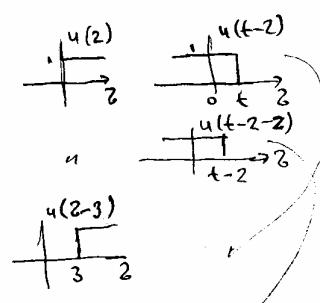
Ancak,

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 0 < \tau < t, t > 0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$u(\tau)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 0 < \tau < t-2, t > 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 3 < \tau < t, t > 3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

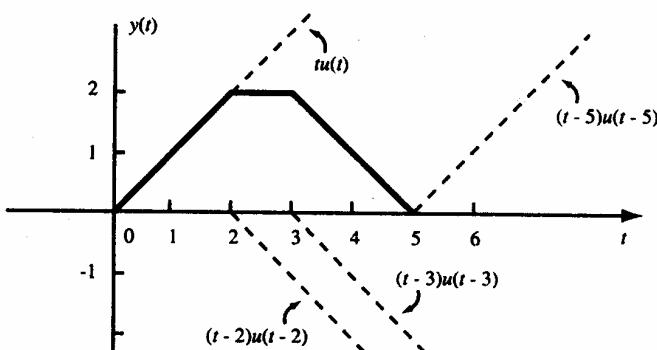
$$u(\tau-3)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 3 < \tau < t-2, t > 5 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$



olduğundan,  $y(t)$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left( \int_0^t d\tau \right) u(t) - \left( \int_0^{t-2} d\tau \right) u(t-2) \\
 &\quad - \left( \int_3^t d\tau \right) u(t-3) + \left( \int_3^{t-2} d\tau \right) u(t-5) \\
 &= tu(t) - (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5)
 \end{aligned}$$

$y(t)$ 'nin değişimi Şekil 2-7'de çizilmiştir.



Şekil 2-7

- (b)  $h(\tau), x(\tau)$  fonksiyonları ve  $t$ 'nin farklı değerleri için  $h(t-\tau)$ ,  $x(\tau)h(t-\tau)$  fonksiyonları Şekil 2-8'de çizilmiştir.  $t < 0$  ve  $t > 5$  için örtüşme olmadığından  $y(t) = 0$ 'dır. Örtüşmenin olduğu diğer aralıklarda dikdörtgen darbelerin alanları hesaplanırsa  $y(t)$  şu biçimde bulunur:

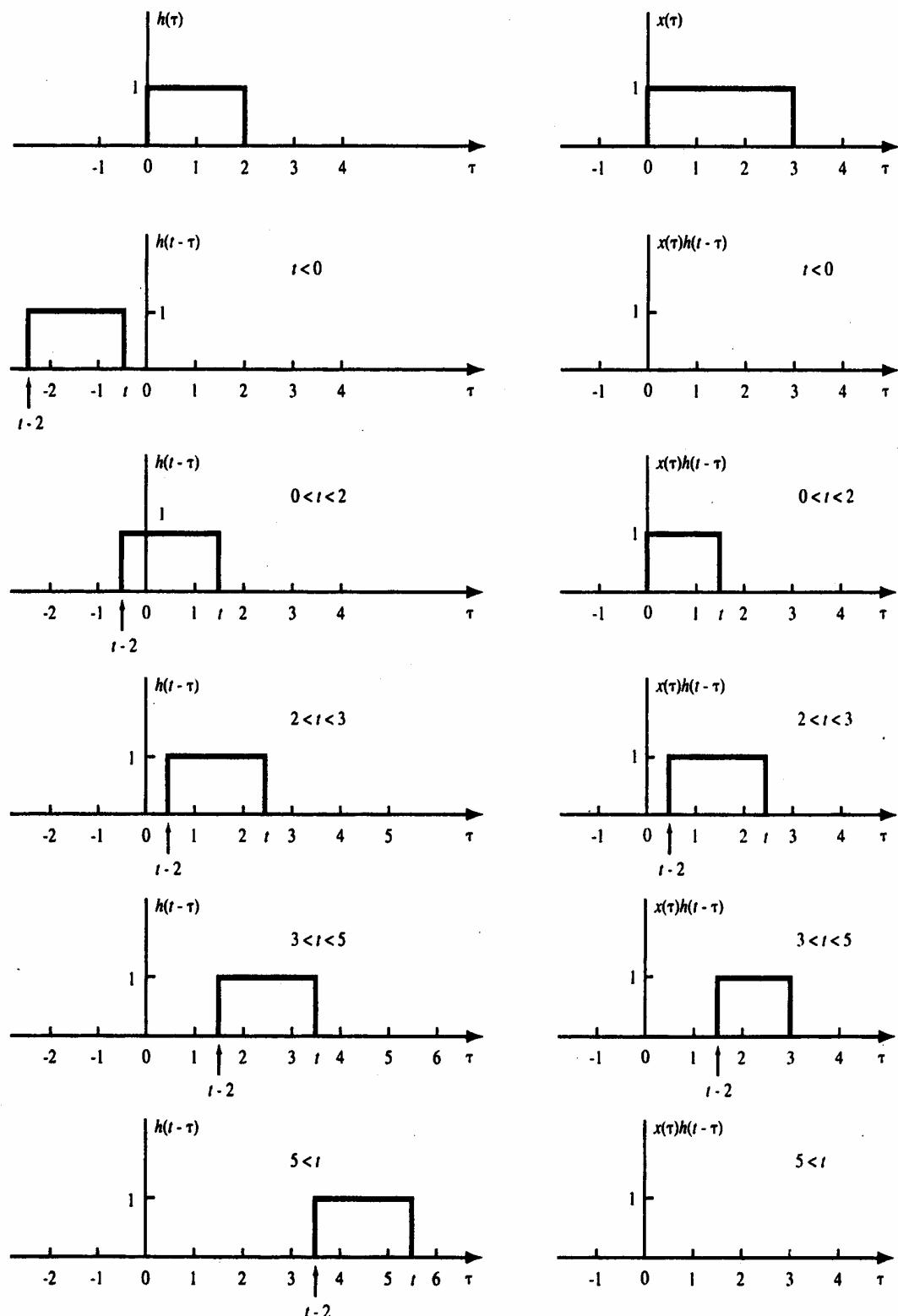
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t \leq 2 \\ 2 & 2 < t \leq 3 \\ 5-t & 3 < t \leq 5 \\ 0 & 5 < t \end{cases}$$

$y(t)$ 'nin değişimi Şekil 2.9'da çizilmiştir.

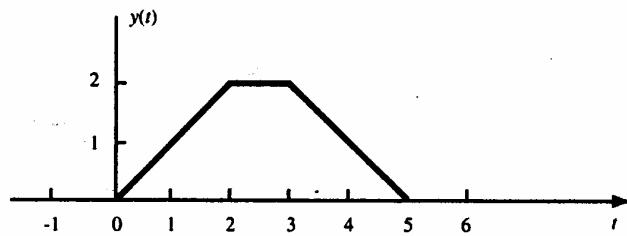
- 2.7.  $h(t)$ , Şekil 2-10(a)'da verilen üçgen darbe,  $x(t)$  ise Şekil 2-10(b)'de verilen ve matematiksel olarak aşağıda tanımlanan birim dürtü katarı olsun.

$$x(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (2.68)$$

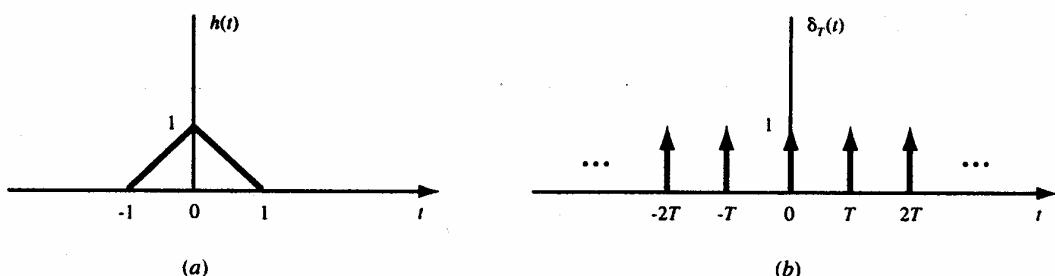
- (a)  $T = 3$ , (b)  $T = 2$ , (c)  $T = 1.5$  değerleri için  $y(t) = h(t)*x(t)$ 'yi hesaplayarak çiziniz.



Şekil 2-8



Şekil 2-9



Şekil 2-10

Eşitlik (2.59) ve (2.9)'dan

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h(t) * \delta_T(t) = h(t) * \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-nT)
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

(a)  $T=3$  için Eşitlik (2.69)'un alacağı biçim

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-3n)$$

olup, çizimi Şekil 2-11(a)'da verilmiştir.

(b)  $T=2$  için Eşitlik (2.69)'un alacağı biçim

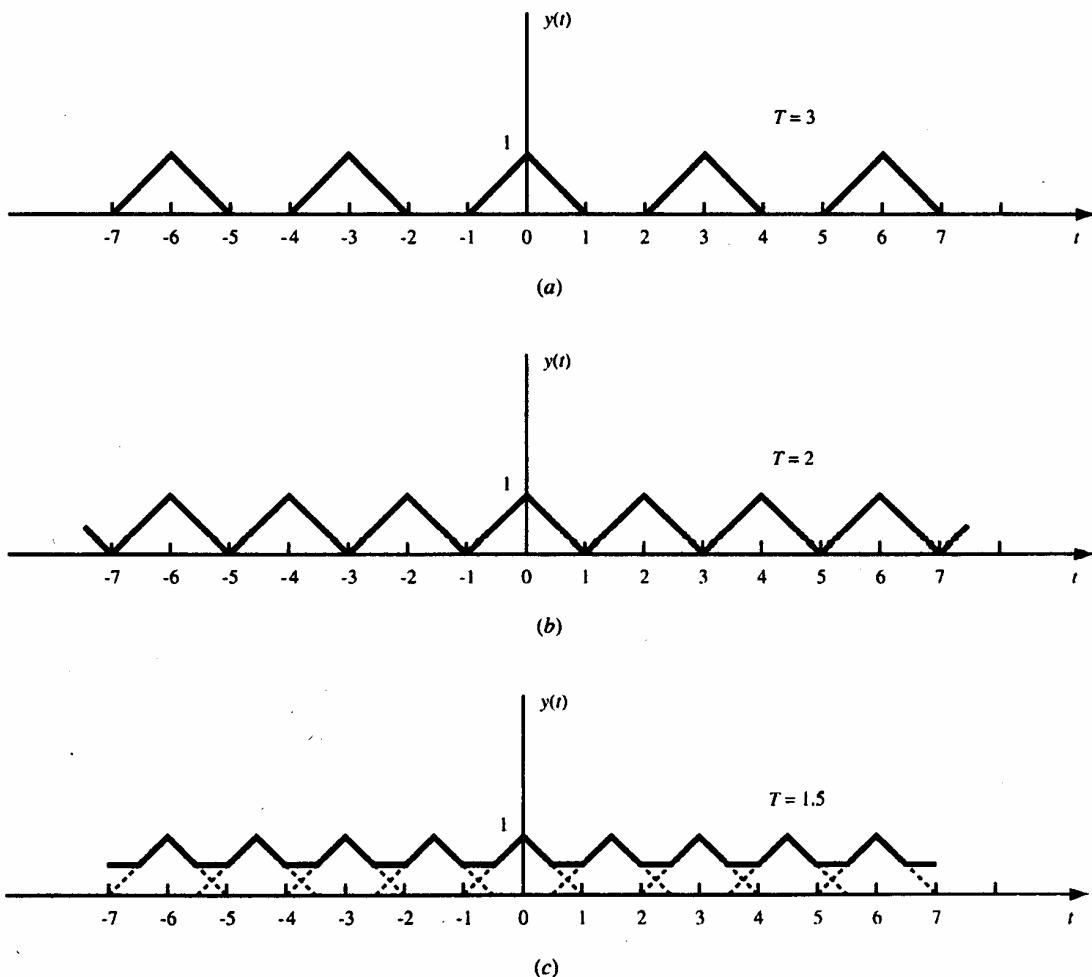
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-2n)$$

olup, çizimi Şekil 2-11(b)'de verilmiştir.

(c)  $T=1.5$  için ise Eşitlik (2.69)'un alacağı biçim

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-1.5n)$$

olup, çizimi Şekil 2-11(c)'de verilmiştir.  $T<2$  olduğunda, üçgen darbelerin birbirinden ayrık olmayıp, örtüşmenin sözkonusu olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 2-11

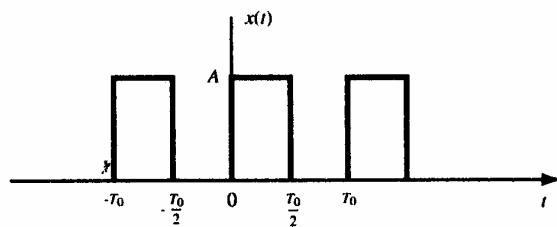
- 2.8.  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  ortak periyotları  $T_0$  olan birer periyodik sinyal ise  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'nin konvolüsüyonu yakınsaklaşmaz. Bu durumda  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'nin periyodik konvolüsyonu şöyle tanımlanır.

$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (2.70)$$

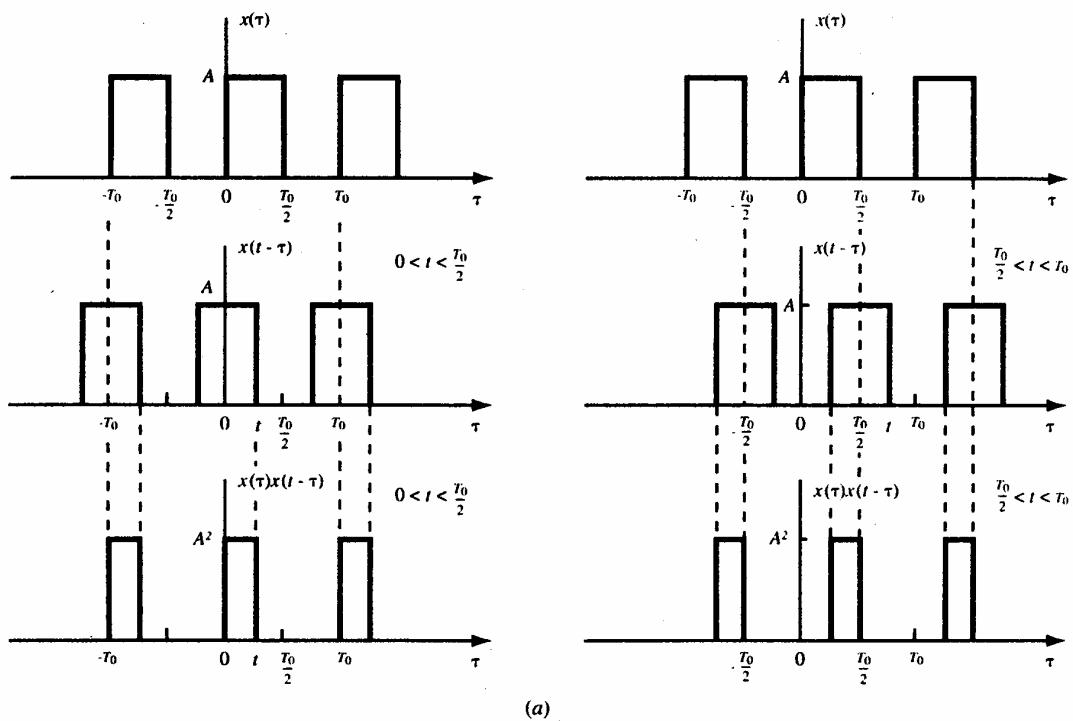
- (a)  $f(t)$ 'nin periyodik ve periyodunun  $T_0$  olduğunu gösteriniz.  
 (b) Herhangi bir  $a$  için aşağıdaki ifadeyi elde ediniz.

$$f(t) = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (2.71)$$

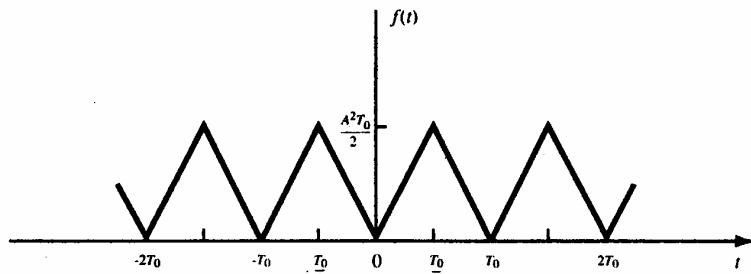
- (c) Şekil 2-12'de gösterilen kare dalga  $x(t)$  sinyalinin kendisiyle konvolüsyonunu hesaplayınız ve çiziniz. .



Şekil 2-12



(a)



Şekil 2-13

- (a)  $x_2(t)$  periyodik ve periyodu  $T_0$  olduğundan

$$x_2(t + T_0 - \tau) = x_2(t - \tau)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik Eşitlik (2.70)'de kullanılrsa

$$\begin{aligned} f(t + T_0) &= \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t + T_0 - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $f(t)$  periyodik olup periyodu  $T_0$ 'dır.

- (a)  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  aynı  $T_0$  periyotlu, birer periyodik sinyal olduklarından  $x_1(t)x_2(t - \tau)$  da periyodik olup periyodu  $T_0$ 'dır. O halde, (1.88) özelliği (Prob.1.17) kullanılarak herhangi bir  $a$  için

$$f(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

olduğu görülür.

- (b) Şekil 2-13(a)'da gösterilen  $x(t)$ ,  $x(t-\tau)$  ve  $x(t)x(t-\tau)$  sinyalleri kullanılarak periyodik konvolusyon işlemi grafiksel olarak gerçekleştirilir. Bulunan sonuç

$$f(t) = \begin{cases} A^2 t & 0 < t \leq T_0/2 \\ -A^2(t - T_0) & T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad f(t + T_0) = f(t)$$

olup Şekil 2-13(b)'de çizilmiştir.

## SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

- 2.9.** Şekil 2-14(a) ve (b)'deki sinyaller, sürekli zamanlı, DZD belirli bir sistemin sırasıyla  $x(t)$  girişi ve  $y(t)$  çıkışıdır. Giriş: (a)  $x(t-2)$ ; (b)  $\frac{1}{2}x(t)$  için çıkışları çiziniz.

- (a) Sistem zamanla değişmez olduğundan çıkış  $y(t-2)$  olacaktır (Şekil 2-14(c)).  
 (b) Sistem doğrusal olduğundan çıkış  $\frac{1}{2}y(t)$  olacaktır (Şekil 2-14(d)).

### 2.10.

$$s(t) = e^{-t} u(t)$$

basamak tepkisi ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin Şekil 2-15(a)'da verilen  $x(t)$  girişi için çıkışını saptayınız ve çiziniz.

Şekil 2-15(a)'da verilen  $x(t)$  girişi analitik olarak

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

birimde ifade edilebilir. Sistem DZD olduğundan  $y(t)$  çıkışı

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t-1) - s(t-3) \\ &= e^{-(t-1)} u(t-1) - e^{-(t-3)} u(t-3) \end{aligned}$$

birimde oluşturulabilir (Şekil 2-15(b)).

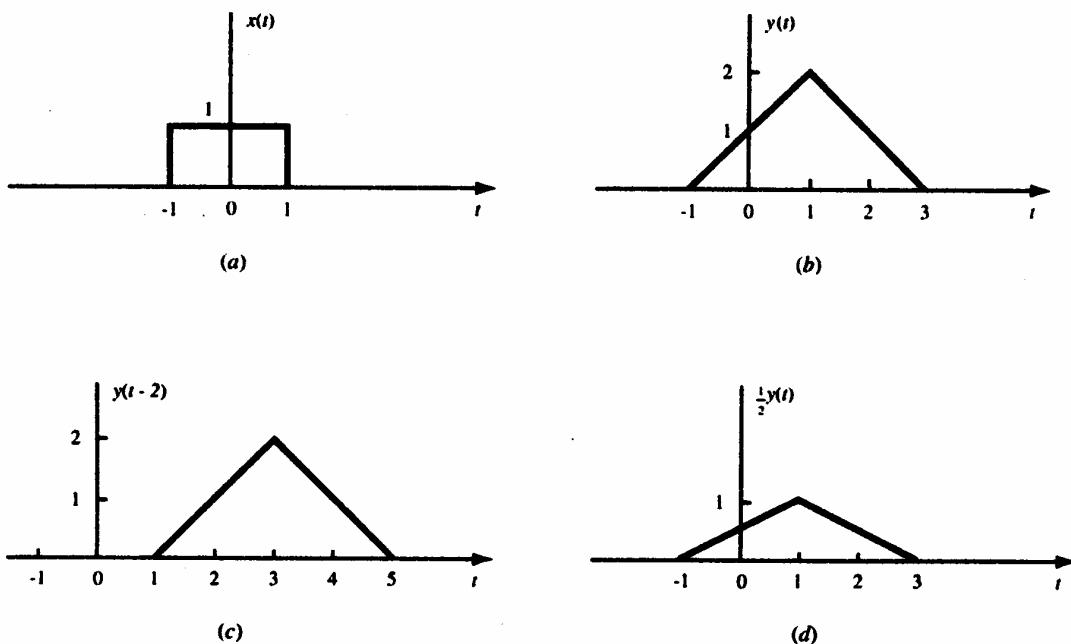
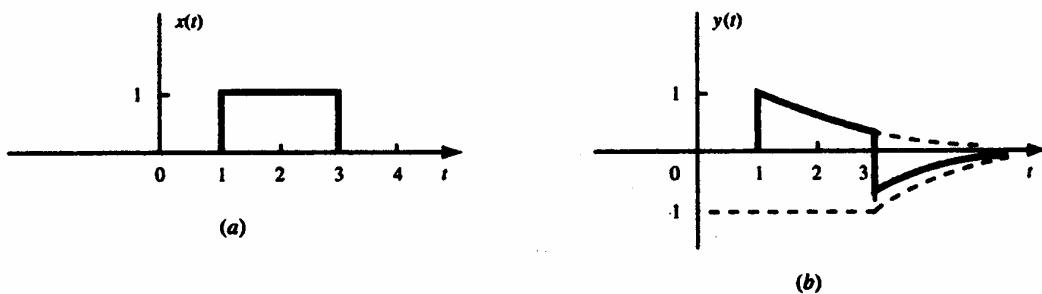


Fig. 2-14



Şekil 2-15

## 2.11.

$$y(t) = T\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau \quad (2.72)$$

ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD bir sistem verilmiştir. (bkz. Prob. 1.56).

- (a) Sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisini bulunuz ve çiziniz.
- (b) Sistem nedensel midir?
- (a) Eşitlik (2.72) aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau) d\tau \quad (2.73)$$

Eşitlik (2.61) ve (2.9) yardımıyla Eşitlik (2.73) şöyle ifade edilebilir.

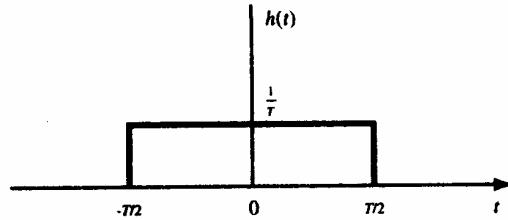
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T}x(t) * u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T}x(t) * u\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ &= x(t) * \frac{1}{T} \left[ u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] = x(t) * h(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

O halde,

$$h(t) = \frac{1}{T} \left[ u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.75)$$

olup, çizimi Şekil 2-16'da gösterilmiştir.

- (a) Şekil 2-16 veya Eşitlik (2.75)'den  $t < 0$  için  $h \neq 0$  olduğu görülmektedir. O halde, sistem nedensel değildir.



Şekil 2-16

- 2.12.** Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $x(t)$  girişine olan çıkışının  $y(t)$  olduğunu varsayıınız. Giriş  $x'(t)$  olduğunda bu sistemin çıkışını bulunuz. Burada  $x'(t)$ ,  $x(t)$ 'nin birinci türevidir.

Eşitlik (2.10) uyarınca

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

olup bu konvolüsyon entegralinin her iki tarafının  $t$  'ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [h(\tau) x(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x'(t - \tau) d\tau = h(t) * x'(t) \end{aligned} \quad (2.76)$$

elde edilir. Burada, giriş  $x'(t)$  olduğundan sistem çıkışının  $y'(t)$  olduğuna dikkat ediniz.

- 2.13.** Sürekli zamanlı, DZD sistemler için SGSC kararlılık şartının [Eşitlik (2.21)] geçerli olduğunu gösteriniz.

Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin girişinin aşağıdaki biçimde sınırlandırılmış olduğunu varsayıınız.

$$|x(t)| \leq k_1 \quad \text{tüm } t \text{ değerleri için} \quad (2.77)$$

Bu durumda, Eşitlik (2.10) kullanılarak ve  $|x(t-\tau)| \leq k$  [Eşitlik (2.77)] koşulu nedeniyle

$$\begin{aligned}|y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) x(t-\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \leq k_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde, eğer dürtü tepki aşağıdaki mutlak entegre edilebilme koşulunu

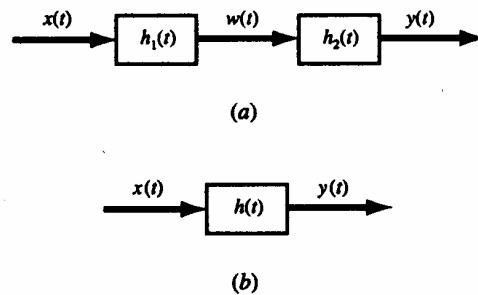
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = K < \infty$$

sağlıyor ise  $|y(t)| \leq k_1 K = k_2$  olacağından sistem SGSC anlamında kararlıdır.

- 2.14.** İki sistemin kaskat bağlantısından oluşan bir sistem Şekil 2-17(a)'da gösterilmiştir. Bu sistemlerin dürtü tepkileri sırasıyla  $h_1(t)$  ve  $h_2(t)$  olup bunlar:

$$h_1(t) = e^{-2t} u(t) \quad h_2(t) = 2e^{-t} u(t)$$

- (a) Şekil 2-17(b)'de gösterilen tüm sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisini bulunuz.  
 (b) Tüm sistemin SGSC anlamında kararlılığını saptayınız.



**Şekil 2-17**

- (a) Birinci sistemin çıkışı  $w(t)$  olarak tanımlanırsa Eşitlik (2.6).

$$w(t) = x(t) * h_1(t) \quad (2.78)$$

biçimine girer.  $w(t)$ 'nin tanımı üstteki eşitlikte yerine konursa

$$y(t) = w(t) * h_2(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (2.79)$$

yazılabilir. Konvolüsyonun birleşim özelliği (2-8) uyarınca Eşitlik (2.79) şöyle düzenlenenebilir.

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h(t) \quad (2.80)$$

O halde, tüm sistemin dürtü tepkisi

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (2.81)$$

biçiminde olacaktır. Verilen  $h_1(t)$  ve  $h_2(t)$  ile işlemler yapılarsa sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(\tau) 2e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau \\ &= 2e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = 2e^{-t} \left[ \int_0^t e^{-\tau} d\tau \right] u(t) \\ &= 2(e^{-t} - e^{-2t}) u(t)\end{aligned}$$

(b) Yukarıda elde edilen  $h(t)$  kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau &= 2 \int_0^{\infty} (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) d\tau = 2 \left[ \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{-2\tau} d\tau \right] \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 1 < \infty\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. O halde sistem SGSC anlamında kararlıdır.

## SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

**2.15.** Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sürekli zamanlı, DZD sistem için:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (2.82)$$

- (a) Sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisini bulunuz.
- (b)  $e^{st}$  karmaşık üstel fonksiyonunun sistemin bir özfonsiyonu olduğunu gösteriniz.
- (c)  $e^{st}$  ye ilişkin sistem özdeğerini (a) kısmında elde edilen  $h(t)$  dürtü tepkisini kullanarak bulunuz.

(a) Eşitlik (2.82), tanım (2.1) ve Eşitlik (1.21) den

$$h(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau = e^{-(t-\tau)}|_{\tau=0} = e^{-t} \quad t > 0$$

elde edilir. O halde

$$h(t) = e^{-t} u(t) \quad (2.83)$$

(b)  $x(t) = e^{st}$  ise,

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} e^{s\tau} d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^t e^{(s+1)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{s+1} e^{st} = \lambda e^{st} \quad \text{if } \operatorname{Re} s > -1\end{aligned} \quad (2.84)$$

bulunur. O halde, tanım (2.22) uyarınca  $e^{st}$  sistemin özvektörü olup buna ilişkin özdeğer:

$$\lambda = \frac{1}{s+1} \quad (2.85)$$

(c) Eşitlik (2.24) ve (2.83) yardımıyla,  $e^{st}$  ye ilişkin özdeğer:

$$\begin{aligned}\lambda = H(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)\tau} d\tau = \frac{1}{s+1} \quad \text{if } \operatorname{Re} s > -1\end{aligned}$$

olup bu, Eşitlik (2.85)'de verilen ile aynıdır.

**2.16.**

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau \quad (2.86)$$

ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD sistem için:

- (a)  $e^{st}$  özfonsiyonuna ilişkin sistem özdeğerini bulunuz.  
 (b) Sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisini kullanarak (a) kısmını tekrarlayınız.  
 (a) Eşitlik (2.86)'da  $x(\tau) = e^{s\tau}$  dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{s\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{sT} (e^{sT/2} - e^{-sT/2}) e^{st} = \lambda e^{st} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle sistemin  $e^{st}$  ye ilişkin özdeğeri:

$$\lambda = \frac{1}{sT} (e^{sT/2} - e^{-sT/2}) \quad (2.87)$$

$$h(t) = \frac{1}{T} \left[ u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Eşitlik (2.24) deki tanım ifadesi ile  $e^{st}$  ye ilişkin  $H(s)$  özdeğeri

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{sT} (e^{sT/2} - e^{-sT/2})$$

olup, bu Eşitlik (2.87) ile aynıdır.

- 2.17.**  $h(t)$  dürtü tepkisi gerçel ve çift olan kararlı, sürekli zamanlı, DZD bir sistem verilmiştir. Bu sistemin aynı gerçel özdeğere ilişkin özfonsiyonlarının  $\cos \omega t$  ve  $\sin \omega t$  olduğunu gösteriniz.

Eşitlik (2.23) ve (2.24)'de  $s = j\omega$  konarak  $e^{j\omega t}$ 'nin sürekli zamanlı, DZD sisteminin bir özfonsiyonu olduğu ve buna ilişkin özdeğerin ise

$$\lambda = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.88)$$

olduğu görülür. Sistem kararlı olduğundan, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

$$\text{sağlandığından } \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) e^{-j\omega\tau}| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |e^{-j\omega\tau}| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

bulunur. Burada  $|e^{-j\omega\tau}| = 1$  dir.  $H(j\omega)$  her  $\omega$  için yakınsaklaşır. Euler formülü ile

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sin \omega\tau d\tau \end{aligned} \quad (2.89)$$

oluşturulur.  $\cos \omega t$   $\tau$ 'nun bir çift,  $\sin \omega t$  ise  $\tau$ 'nun bir tek fonksiyonudur. Eğer  $h(t)$  gerçel ve çift ise  $h(\tau) \cos \omega\tau$  çift,  $h(\tau) \sin \omega\tau$  ise tektir. Bu durumda, Eşitlik (1.75a) ve (1.77) nedeniyle Eşitlik (2.89) şöyle yazılabilir.

$\cos \omega t$  çift bir fonksiyon olduğundan, Eşitlik (2.90)'da  $\omega \rightarrow -\omega$  ve Eşitlik (2.89)'da  $j \rightarrow -j$  dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} H(-j\omega) &= H(j\omega)^* = 2 \int_0^{\infty} h(\tau) \cos(-\omega\tau) d\tau \\ &= 2 \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau = H(j\omega) \end{aligned} \quad (2.91)$$

elde edilir. Bu durumda  $e^{j\omega t}$  özfonksiyonuna ilişkin  $H(j\omega)$  özdeğerinin gerçek olduğu görülmektedir. Sistemin  $T$  ile tanımladığı varsayılsa Eşitlik (2.23), (2.24) ve (2.91) den

$$T\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega) e^{j\omega t} \quad (2.92a)$$

$$T\{e^{-j\omega t}\} = H(-j\omega) e^{-j\omega t} = H(j\omega) e^{-j\omega t} \quad (2.92b)$$

bulunur.  $T$  doğrusal olduğundan

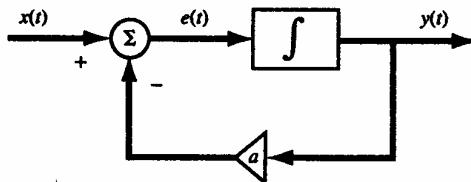
$$\begin{aligned} T\{\cos \omega t\} &= T\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right\} = \frac{1}{2}T\{e^{j\omega t}\} + \frac{1}{2}T\{e^{-j\omega t}\} \\ &= H(j\omega)\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right\} = H(j\omega) \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.93a)$$

$$\begin{aligned} \text{ve } T\{\sin \omega t\} &= T\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = \frac{1}{2j}T\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}T\{e^{-j\omega t}\} \\ &= H(j\omega)\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = H(j\omega) \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.93b)$$

yazılabilir. O halde, Eşitlik (2.93) ve (2.93b)'den  $\cos \omega t$  ve  $\sin \omega t$ 'nin Eşitlik (2.88) ve (2.90) ile verilen aynı gerçek  $H(j\omega)$  özdeğerlerine sahip sistemin özfonksiyonları olduğu sonucuna varılır.

## TÜREVSEL DENKLEMLER İLE TANIMLANAN SİSTEMLER

- 2.18.** Bir entegratör ve bir skalar çarpıcıdan oluşan sürekli zamanlı bir sistem için  $y(t)$  çıkışı ile  $x(t)$  girişi arasındaki ilişkiye veren türevsel denklemi bulunuz (Şekil 2-18).



Şekil 2-18

Şekil 2-18'deki entegratör girişi  $e(t)$  olarak seçilirse, entegratörün giriş ve çıkış ilişkisi

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau \quad (2.94)$$

olduğundan bu eşitliğin iki tarafının  $t$ 'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t) \quad (2.95)$$

olur. Daha sonra, yine Şekil 2-18'den entegratör girişi  $e(t)$

$$e(t) = x(t) - ay(t) \quad (2.96)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (2.96), Eşitlik (2.95)'de yerine konursa

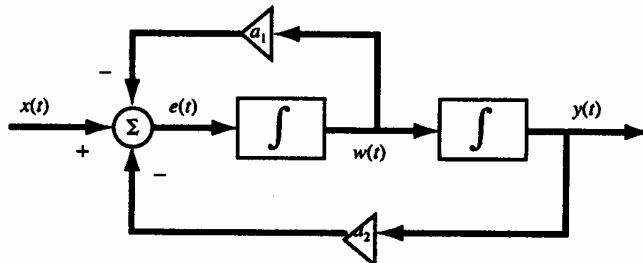
$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t)$$

ya da

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (2.97)$$

elde edilir. Bu istenen birinci mertebeden türevsel denklemidir.

- 2.19.** Şekil 2-19'da verilen sürekli zamanlı sistem iki entegratör ve iki skalar çarpıcıdan oluşmuştur.  $y(t)$  çıkışı ve  $x(t)$  girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan türevsel denklemi yazınız.



Şekil 2-19

Şekil 2-19'da  $e(t)$  ve  $w(t)$  sırasıyla entegratörün girişini ve çıkışını temsil etsin. Eşitlik (2.95) kullanılarak birinci entegratörün girişi şöyle ifade edilir.

$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = -a_1 w(t) - a_2 y(t) + x(t) \quad (2.98)$$

Yine Şekil 2-19'dan  $w(t)$ 'nin ikinci entegratörün girişi olduğu görülmektedir.

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.99)$$

Eşitlik (2.99), Eşitlik (2.98)'de yerine konursa

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_2 y(t) + x(t)$$

ya da

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t) \quad (2.100)$$

bulunur ki bu istenen ikinci mertebeden türevsel denklemidir.

Not: Genel olarak, entegratörlerin ve skalar çarpıcıların bağlanmasıından oluşan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin mertebesi, sistemdeki entegratör sayısına eşittir.

**2.20.** a bir sabit olmak üzere sürekli zamanlı bir sistemde  $x(t)$  girişi ve  $y(t)$  çıkışı arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (2.101)$$

(a)  $y(t)$  çıkışını bulunuz. Yardımcı koşul:  $y(0) = y_0$  ve  $x(t)$  girişi:

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t) \quad (2.102)$$

(b)  $y(t)$ 'yi sıfır giriş ve sıfır durum tepkileri cinsinden ifade ediniz.

(a)

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

olsun. Burada  $y_p(t)$ , Eşitlik (2.101)'i sağlayan özel çözüm ve  $y_h(t)$  ise aşağıdaki eşitliği sağlayan homojen çözümüdür.

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0 \quad (2.103)$$

$y_p(t)$  özel çözümünün

$$y_p(t) = Ae^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.104)$$

birimde olduğu varsayılsa, Eşitlik (2.104), Eşitlik (2.101)'de yerine konarak

$$-bAe^{-bt} + aAe^{-bt} = Ke^{-bt}$$

yazılabilceğinden,  $A = K/(a-b)$  ve

$$y_p(t) = \frac{K}{a-b}e^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.105)$$

elde edilir.  $y_h(t)$ 'yi elde etmek için bunun

$$y_h(t) = Be^{st}$$

birimde olduğu varsayılsa, bunun Eşitlik (2.103)'de yerine konulmasıyla

$$sBe^{st} + aBe^{st} = (s+a)Be^{st} = 0$$

yazılabilir. Buradan  $s = -a$  ve

$$y_h(t) = Be^{-at}$$

bulunur.  $y_p(t)$  ve  $y_h(t)$ 'nin birleştirilmesi sonucu

$$y(t) = Be^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.106)$$

olur.  $y(0) = y_0$  yardımcı koşulu Eşitlik (2.106)'da kullanılrsa

$$B = y_0 - \frac{K}{a-b}$$

olarak bulunur. O halde, Eşitlik (2.106) aşağıdaki biçimini alır.

$$y(t) = \left( y_0 - \frac{K}{a-b} \right) e^{-at} + \frac{K}{a-b} e^{-bt} \quad t > 0 \quad (2.107)$$

$t < 0$  için  $x(t) = 0$  olduğundan Eşitlik (2.101), Eşitlik (2.103)'e dönüşür. Bunun sonucu

$$y(t) = Be^{-at} \quad t < 0$$

geçerli olup  $y(0) = y_0$  yardımcı koşulu ile  $y(t)$  aşağıdaki gibidir.

$$y(t) = y_0 e^{-at} \quad t < 0 \quad (2.108)$$

- (a) Eşitlik (2.107) ve (2.108)'in birleştirilmesiyle  $y(t)$ , sıfır giriş tepkisi  $y_{zi}(t)$  ve sıfır durum tepkisi  $y_{zs}(t)$  cinsinden

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) u(t) \\ &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \end{aligned} \quad (2.109)$$

olarak yazılabilir. Burada:  $y_{zi}(t) = y_0 e^{-at}$

$$y_{zs}(t) = \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) u(t) \quad (2.110b)$$

## 2.21. Prob. 2.20'deki sistemi ele alalım.

- (a)  $y(0) = y_0 \neq 0$  ise sistemin doğrusal olmadığını gösteriniz.

- (b)  $y(0) = y_0 = 0$  ise sistemin doğrusal olduğunu gösteriniz.

- (a) Doğrusal bir sistemin sıfır giriş için sıfır çıkışa sahip olma özelliğini anımsayınız (Bölüm 1.5E). Ancak,  $K=0$  için Eşitlik (2.102)'den  $x(t)=0$  olduğu, buna karşılık Eşitlik (2.109)'dan ise

$$y(t) = y_0 e^{-at} \neq 0$$

olduğu görülmektedir. O halde  $y(0) = y_0 \neq 0$  ise sistem doğrusal değildir.

- (b)  $y(0) = 0$  ise sistemin doğrusal olduğunu gösterelim.  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  giriş sinyallerine ilişkin çıkışlar  $y_1(t)$  ve  $y_2(t)$  olsun. Bu durumda

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t) = x_1(t) \quad (2.111)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t) = x_2(t) \quad (2.112)$$

olup ilgili yardımcı koşullar:

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad (2.113)$$

$\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  karmaşık katsayıları ile  $x(t)$  girişi

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

biçiminde ifade edilirse, Eşitlik (2.111)  $\alpha_1$  ile ve Eşitlik (2.112)  $\alpha_2$  ile çarpılıp toplandığında elde edilen

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

ilişkisi

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

türevsel denklemini sağlar. Ayrıca Eşitlik (2.113)'den

$$y(0) = \alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) = 0$$

bulunur. O halde  $y(t)$ ,  $x(t)$  girişine ilişkin çıkıştır ve bunun sonucu sistem doğrusaldır.

**2.22.** Prob. 2.20'deki sistemi ele alalım.  $y(0)=0$  başlangıçta durgun olma koşulunun sistemi ayrıca zamanla değişmez yaptığı gösteriniz.

$x_1(t)$  girişine olan tepki  $y_1(t)$  olsun. Bu durumda

$$x_1(t) = 0 \quad t \leq 0 \quad (2.114)$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t) = x_1(t) \quad (2.115)$$

$$y_1(0) = 0 \quad (2.116)$$

Kaydırılmış giriş  $x_2(t) = x_1(t-\tau)$  için olan tepki  $y_2(t)$  ise, Eşitlik (2.114)'den

$$x_2(t) = 0 \quad t \leq \tau \quad (2.117)$$

olup  $y_2(t)$  tepkisi

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t) = x_2(t) \quad (2.118)$$

$$\text{ve} \quad y_2(\tau) = 0 \quad (2.119)$$

ilişkilerini sağlamalıdır. Eşitlik (2.115)'den

$$\frac{dy_1(t-\tau)}{dt} + ay_1(t-\tau) = x_1(t-\tau) = x_2(t)$$

yazılabilir.  $y_2(t) = y_1(t-\tau)$  varsayıımı altında Eşitlik (2.116) yardımıyla

$$y_2(\tau) = y_1(\tau - \tau) = y_1(0) = 0$$

olduğu görülür. O halde Eşitlik (2.118) ve (2.119) sağlanmakta ve sistemin zamanla değişmez olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

**2.23.** Prob. 2.20'deki sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisini bulunuz.

$h(t)$  dürtü tepkisi

$$\frac{dh(t)}{dt} + ah(t) = \delta(t) \quad (2.120)$$

türevsel denklemini sağlamalıdır. Eşitlik (2.120)'nin  $h_h(t)$  homojen çözümü de

$$\frac{dh_h(t)}{dt} + ah_h(t) = 0 \quad (2.121)$$

eşitliğini sağlar.  $h_h(t)$  için varsayılan tip çözümü

$$h_h(t) = ce^{st}$$

Eşitlik (2.121)'de yerine konursa, bulunacak olan

$$sce^{st} + ace^{st} = (s+a)ce^{st} = 0$$

ilişkisinden  $s = -a$  ve

$$h_h(t) = ce^{-at}u(t) \quad (2.122)$$

elde edilir.  $h_p(t)$  sinyali  $\delta(t)$  içermeyeceğinden  $h_p(t)$  özel çözümünün sıfır olması gereklidir. Aksi halde  $h(t)$ , Eşitlik (2.120)'nin sağ tarafında bulunmayan  $\delta(t)$ 'nin bir türevini içerecektir. O halde

$$h(t) = ce^{-at}u(t) \quad (2.123)$$

$c$  sabitini bulmak için Eşitlik (2.123)'ü Eşitlik (2.120)'de yerine koyalım.

$$\frac{d}{dt} [ce^{-at}u(t)] + ace^{-at}u(t) = \delta(t)$$

ya da  $-ace^{-at}u(t) + ce^{-at}\frac{du(t)}{dt} + ace^{-at}u(t) = \delta(t)$

ilişkisi Eşitlik (1.25) ve (1.30)'un ışığı altında irdelenirse

$$ce^{-at}\frac{du(t)}{dt} = ce^{-at}\delta(t) = c\delta(t) = \delta(t)$$

ve  $c = 1$  bulunacaktır. O halde, dürtü tepkisi aşağıdaki gibidir.

$$h(t) = e^{-at}u(t) \quad (2.124)$$

**2.24.** Prob. 2.20'deki sistem için  $y(0)=0$ 'dır.

- (a)  $h(t)$  dürtü tepkisinden yararlanmadan  $s(t)$  basamak tepkiyi bulunuz.
  - (b) Prob. 2.23'de bulunan  $h(t)$  dürtü tepkisinden yararlanarak  $s(t)$  basamak tepkisini bulunuz.
  - (c)  $s(t)$ 'den  $h(t)$  dürtü tepkisini elde ediniz.
- (a) Prob. 2.20'de bulunan

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t)$$

ifadesinde  $K=1$ ,  $b=0$  yapılrsa  $x(t)=u(t)$  ve bunun sonucu  $y(t)=s(t)$  olduğu görülür. O halde, Eşitlik (2.109)'da  $K=1$ ,  $b=0$  ve  $y(0)=y_0=0$  yapılrsa, basamak tepki

$$s(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \quad (2.125)$$

olarak elde edilecektir.

- (b) Prob. 2.23'deki Eşitlik (2.12) ve (2.124) kullanılırsa,  $s(t)$  basamak tepkisi

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e^{-a\tau}u(\tau) d\tau \\ &= \left[ \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \right] u(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \end{aligned}$$

olarak bulunur ki bu, Eşitlik (2.125) ile aynıdır.

- (c) Eşitlik (2.13) ve (2.125) kullanılarak  $h(t)$  dürtü tepkisi oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} h(t) &= s'(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \right] \\ &= e^{-at}u(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u'(t) \end{aligned}$$

Eşitlik (1.25) ve (1.30) gereği

$$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u'(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\delta(t) = \frac{1}{a}(1 - 1)\delta(t) = 0$$

olacağından  $h(t) = e^{-at}u(t)$

bulunur ki bu, Eşitlik (1.124) ile aynıdır.

**2.25.**

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t) \quad (2.126)$$

denklemi ile tanımlanan sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisini elde ediniz.

$h(t)$  dürtü tepkisi aşağıdaki türevsel denklemi sağlanmalıdır.

$$h'(t) + 2h(t) = \delta(t) + \delta'(t) \quad (2.127)$$

Eşitlik (2.127)'nin  $h_h(t)$  homojen çözümü [bkz Prob. 2.23 ve Eşitlik (2.122)]

$$h_h(t) = c_1 e^{-2t} u(t)$$

birimde olup  $h_p(t)$  özel çözümü için de

$$h_p(t) = c_2 \delta(t)$$

birimde bir tip çözüm varsayırsa, genel çözüm

$$h(t) = c_1 e^{-2t} u(t) + c_2 \delta(t) \quad (2.128)$$

olacaktır.  $h(t)$ 'nin, Eşitlik (2.127)'nin sol tarafına  $\delta'(t)$  katısında bulunabilmesi için çözüm ifadesinde  $\delta(t)$  fonksiyonu bulunmalıdır. Eşitlik (2.128), Eşitlik (2.127)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & -2c_1 e^{-2t} u(t) + c_1 e^{-2t} u'(t) + c_2 \delta'(t) + 2c_1 e^{-2t} u(t) + 2c_2 \delta(t) \\ & = \delta(t) + \delta'(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Yine Eşitlik (1.25) ve (1.30)'dan yararlanırsak

$$(c_1 + 2c_2) \delta(t) + c_2 \delta'(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

bulunacaktır.  $\delta(t)$  ve  $\delta'(t)$ 'nin katsayılarının eşitlenmesiyle oluşan

$$c_1 + 2c_2 = 1 \quad c_2 = 1$$

ifadelerinden  $c_1 = -1$  ve  $c_2 = 1$  bulunur. Bu değerler Eşitlik (2.128)'de yerleştirilirse dürtü tepkisi elde edilir.

$$h(t) = -e^{-2t} u(t) + \delta(t) \quad (2.129)$$

**AYRIK ZAMANLI, DİZDİRME BİR SİSTEMİN TEPKİLERİ VE KONVOLÜSYON**

**2.26.** Eşitlik (2.36) ve (2.37) ile verilen aşağıdaki ilişkilerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$(b) \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

(a) Tanım (2.35) uyarınca

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

yazılabilir.  $n-k=m$  değişken değişikliği yapılarsa istenen sonuçlar elde edilir.

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m] h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] x[n-m] = h[n] * x[n]$$

(b)  $x[n] * h_1[n] = f_1[n]$  ve  $h_1[n] * h_2[n] = f_2[n]$ . olsun. Bu durumda

$$f_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[n-k]$$

$$\text{ve } \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = f_1[n] * h_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1[m] h_2[n-m]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[m-k] \right] h_2[n-m]$$

olacaktır.  $r = m-k$  dönüşümü uygulayarak ve toplamada işlem sırasını değiştirerek

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left( \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r] h_2[n-k-r] \right)$$

yazılabilir.

$$f_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r] h_2[n-r]$$

olduğundan

$$f_2[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r] h_2[n-k-r]$$

$$\text{yazılabilir. O halde } \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] f_2[n-k]$$

$$= x[n] * f_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

**2.27.** Aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) x[n] * \delta[n] = x[n] \quad (2.130)$$

$$(b) x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0] \quad (2.131)$$

$$(c) x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (2.132)$$

$$(d) x[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \quad (2.133)$$

(a) Eşitlik (2.35) ve  $\delta(n-k)$ 'nin (1.46) ile verilen özelliği uyarınca:

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = x[n]$$

(a) Benzer bir yol izlənerek

$$x[n] * \delta[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k - n_0] = x[n - n_0]$$

(b) Eşitlik (2.35) ve  $u(n-k)$ 'nın (1.44) ile verilen özelliği uyarınca:

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

(c) Benzer bir yol izlenerek:

$$x[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] u[n - k - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

**2.28.** Kesikli zamanlı, DZD bir sistemin  $x[n]$  girişi ve  $h[n]$  dürtü tepkisi aşağıda verilmiştir.

$$x[n] = u[n] \quad h[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1$$

- (a) Eşitlik (2.35)'i kullanarak  $y[n]$ 'yi hesaplayınız.
- (b) Eşitlik (2.39)'u kullanarak  $y[n]$ 'yi hesaplayınız.
- (c) Eşitlik (2.39) kullanılarak

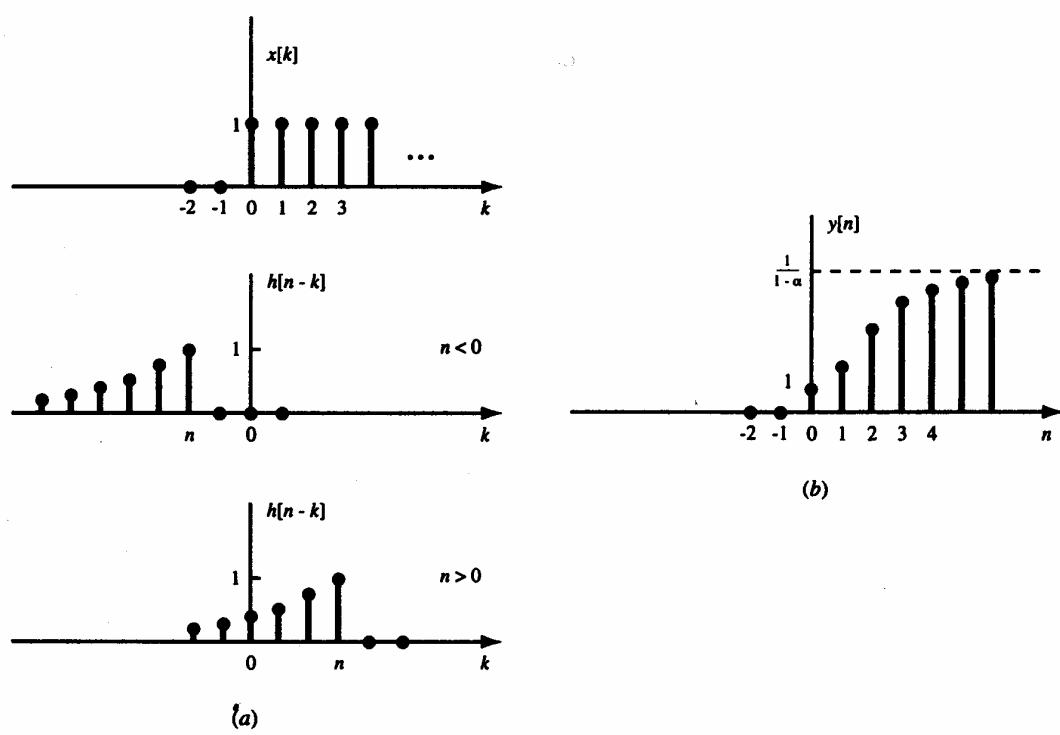
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

yazılabilir.  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  dizileri  $n < 0$  ve  $n > 0$  için Şekil 2-20(a)'da gösterilmiştir. Şekil (2.20(a))'nin incelenmesi sonucu  $n < 0$  için  $x(k)$  ve  $h[n-k]$ 'nın örtüşmediği,  $n \geq 0$  için ise bunların  $k=0$ 'dan  $k=n$ 'ye kadar örtüşlüğü görülmektedir. O halde  $n < 0$  için  $y[n]=0$  dır.  $n \geq 0$  için

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k}$$

olduğundan toplama işlemindeki  $k$  değişkeni  $m=n-k$  olarak değiştirilir ve Eşitlik (1.90) kullanılırsa  $y[n]$

$$y[n] = \sum_{m=-n}^0 \alpha^m = \sum_{m=0}^n \alpha^m = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$



Şekil 2-20

olarak elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilen  $y[n]$  çıkışının değişimi Şekil 2-20(b)'de verilmiştir.

$$y[n] = \left( \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n] \quad (2.134)$$

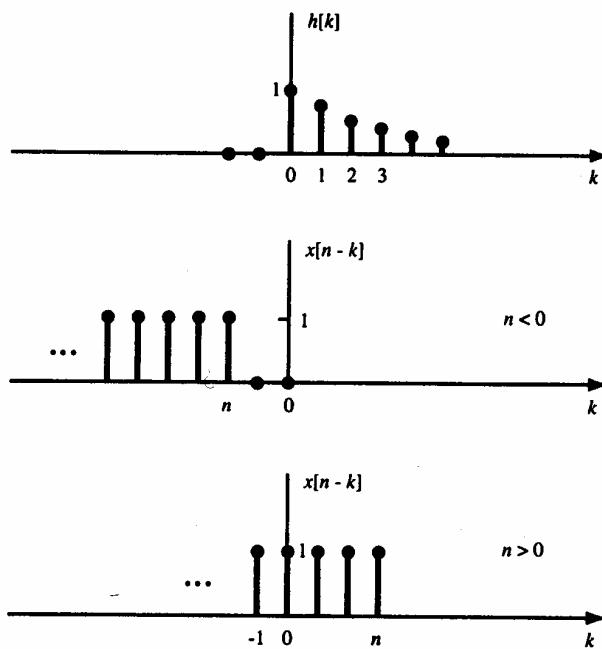
(b) Eşitlik (2.39) kullanılarak

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

yazılabilir. Şekil 2-21'de verilen  $h[k]$  ve  $x[n-k]$  dizilerinin  $n < 0$  için örtüşmediği,  $n \geq 0$  için ise bunların  $k=0, k=n$  aralığında örtüştüğü görülmektedir. O halde,  $n < 0$  için  $y[n] = 0$  ve  $n \geq 0$  için ise

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

olup bu, Eşitlik (2.134)'de verilen sonuçla aynıdır.



Şekil 2-21

2.29.  $y[n] = x[n]*h[n]$  ifadesini aşağıdakiler için hesaplayınız.

- (a)  $x[n] = \alpha^n u[n]$ ,  $h[n] = \beta^n u[n]$
- (b)  $x[n] = \alpha^n u[n]$ ,  $h[n] = \alpha^{-n} u[-n]$ ,  $0 < \alpha < 1$

(a) Eşitlik (2.35)'den

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \beta^{n-k} u[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} u[k] u[n-k] \\ \text{yazılabilir.} \quad u[k]u[n-k] &= \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \quad n \geq 0$$

elde edilir. Eşitlik (1.90) kullanılarak

$$y[n] = \begin{cases} \beta^n \frac{1 - (\alpha/\beta)^{n+1}}{1 - (\alpha/\beta)} u[n] & \alpha \neq \beta \\ \beta^n (n+1) u[n] & \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.135a)$$

$$\text{ya da} \quad y[n] = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) u[n] & \alpha \neq \beta \\ \beta^n (n+1) u[n] & \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.135b)$$

elde edilecektir.

(b)

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \alpha^{-(n-k)} u[-(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{-n} \alpha^{2k} u[k] u[k-n] \end{aligned}$$

$n \leq 0$  için

$$u[k]u[k-n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğundan

$$y[n] = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^2)^k = \frac{\alpha^{-n}}{1 - \alpha^2} \quad n \leq 0 \quad (2.136a)$$

elde edilir.  $n \geq 0$  için.

$$u[k]u[k-n] = \begin{cases} 1 & n \leq k \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

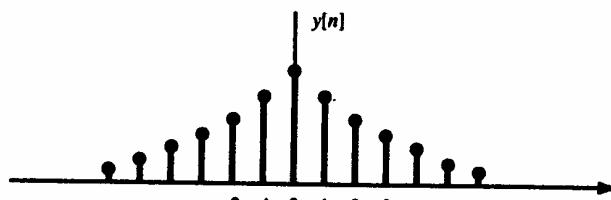
olduğundan Eşitlik (1.92) kullanılarak

$$y[n] = \alpha^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} (\alpha^2)^k = \alpha^{-n} \frac{\alpha^{2n}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^2} \quad n \geq 0 \quad (2.136b)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.136a) ve Eşitlik (2.136b) birleştirilirse sonuç

$$y[n] = \frac{\alpha^{|n|}}{1 - \alpha^2} \quad (2.137)$$

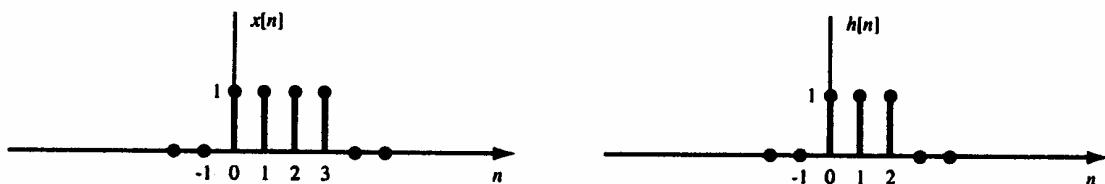
biçiminde olup çizimi Şekil 2-22'dedir.



Şekil 2-22

**2.30.** Şekil 2-23'de gösterilen  $x[n]$  ve  $h[n]$  için  $y[n] = x[n]*h[n]$  konvolüsyonunu

(a) analistik bir yöntemle, (b) grafiksel bir yöntemle hesaplayınız.



Şekil 2-23

(a)  $x[n]$  ve  $h[n]$  analistik olarak şöyle ifade edilebilir.

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Eşitlik (2.38), (2.130) ve (2.131) kullanılarak

$$x[n]*h[n] = x[n]*\{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\}$$

$$= x[n]*\delta[n] + x[n]*\delta[n-1] + x[n]*\delta[n-2]$$

$$= x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

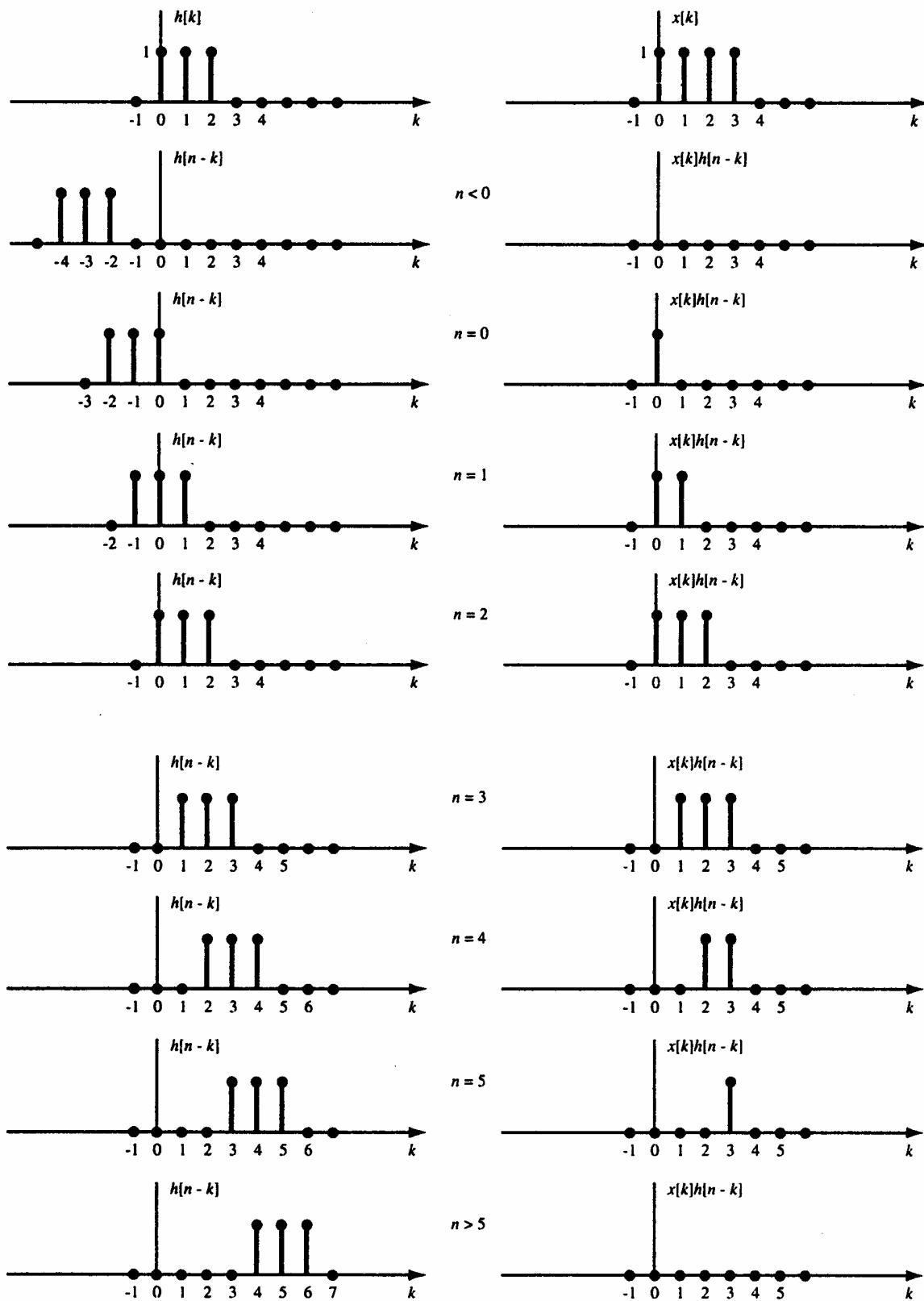
oluşturulur. O halde, istenen sonuç:  $y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$

$$+ \delta[n-4] + \delta[n-5] + \delta[n-6] + \delta[n-7] + \delta[n-8]$$

$$+ \delta[n-9] + \delta[n-10] + \delta[n-11] + \delta[n-12]$$

$$\text{ya da } y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

$$\text{ya da } y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$



Şekil 2-24

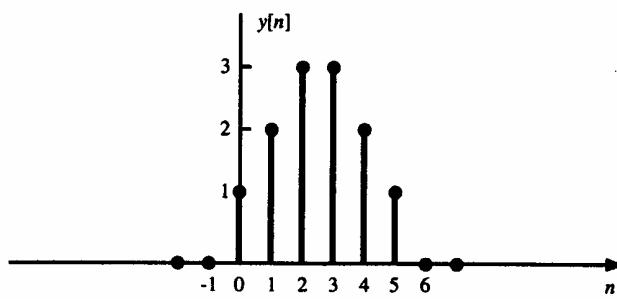
- (b)  $h[k]$ ,  $x[k]$  ve  $h[n-k]$ ,  $x[k]$   $h[n-k]$  dizileri çeşitli  $n$  değerleri için Şekil 2-24'de çizilmiştir. Şekil 2-24'den de görüleceği üzere  $n < 0$  ve  $n > 5$  için  $x[k]$  ve  $h[n-k]$  örtüşmediğinden  $y[n]=0$ 'dır.  $0 \leq n \leq 5$  için  $x[k]$   $h[n-k]$  örtüşüyor. O halde  $0 \leq n \leq 5$  için  $x[k]$   $h[n-k]$  terimlerini toplarsak

$$y[0] = 1 \quad y[1] = 2 \quad y[2] = 3 \quad y[3] = 3 \quad y[4] = 2 \quad y[5] = 1$$

ya da

$$y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

elde edilir. Bu sonuç Şekil 2-25'de gösterilmiştir.



Şekil 2-25

- 2.31.**  $x_1[n]$  ve  $x_2[n]$  dizilerinin her ikisi de periyodik ve ortak periyotları  $N$  ise  $x_1[n]$  ve  $x_2[n]$ 'nin konvolüsüyonu yakınsaklaşmaz. Bu durumda  $x_1[n]$  ve  $x_2[n]$ 'nin periyodik konvolüsüyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n-k] \quad (2.138)$$

$f[n]$ 'nin periyodik ve periyodunun  $N$  olduğunu gösteriniz.

$x_2[n]$  periyodik olup periyodu  $N'$  dir. Diğer bir deyişle

$$x_2[(n-k)+N] = x_2[n-k]$$

O halde Eşitlik (2.138)'den

$$\begin{aligned} f[n+N] &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[n+N-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[(n-k)+N] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[(n-k)] = f[n] \end{aligned}$$

yazılabileninden  $f[n]$  periyodik olup periyodu  $N$  dir.

- 2.32.** Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin  $s[n]$  basamak tepkisi

$$s[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1$$

olarak verilmiş ise bu sistemin,  $h[n]$  dürtü tepkisini bulunuz.

Eşitlik (2.41)'den  $h[n]$  dürtü tepkisi şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} h[n] &= s[n] - s[n-1] = \alpha^n u[n] - \alpha^{n-1} u[n-1] \\ &= \{\delta[n] + \alpha^n u[n-1]\} - \alpha^{n-1} u[n-1] \\ &= \delta[n] - (1-\alpha) \alpha^{n-1} u[n-1] \end{aligned}$$

### AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

- 2.33.** Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin  $x[n]$  girişi periyodik ve periyodu  $N$  ise  $y[n]$  çıkışının da periyodik ve periyodunun  $N$  olduğunu gösteriniz.

Sistemin dürtü tepkisi  $h[n]$  olsun. Eşitlik (2.39) uyarınca  $y[n]$  çıkışını

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

olacaktır.  $n = m + N$  yapılırsa

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[m+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[(m-k)+N]$$

birimine dönüşür.  $x[n]$  periyodik ve periyodu  $N$  olduğundan

$$x[(m-k)+N] = x[m-k]$$

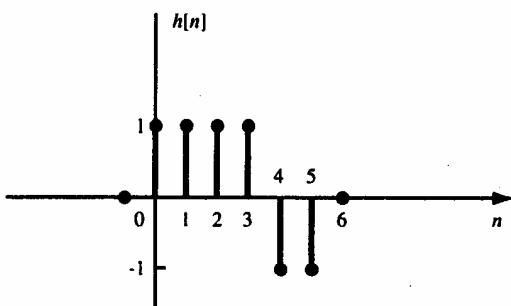
O halde  $y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[m-k] = y[m]$

yazılabilir. Bu ilişki  $y[n]$ 'nin periyodik ve periyodunun  $N$  olduğunu gösterir.

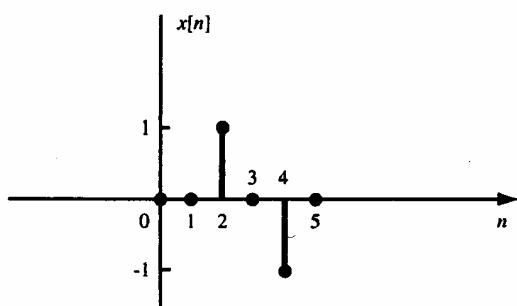
- 2.34.** Ayrık zamanlı DZD bir sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisi Şekil 2-26(a) verilmiştir. Konvolüsyon teknikini kullanmadan Şekil 2-26 (b)'de verilen  $x[n]$  girişi için sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisini bulunuz ve çiziniz.  $y[n]$  adınızı

Şekil 2-26 (b)'de verilen  $x[n]$  sinyalini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$x[n] = \delta[n-2] - \delta[n-4]$$



(a)



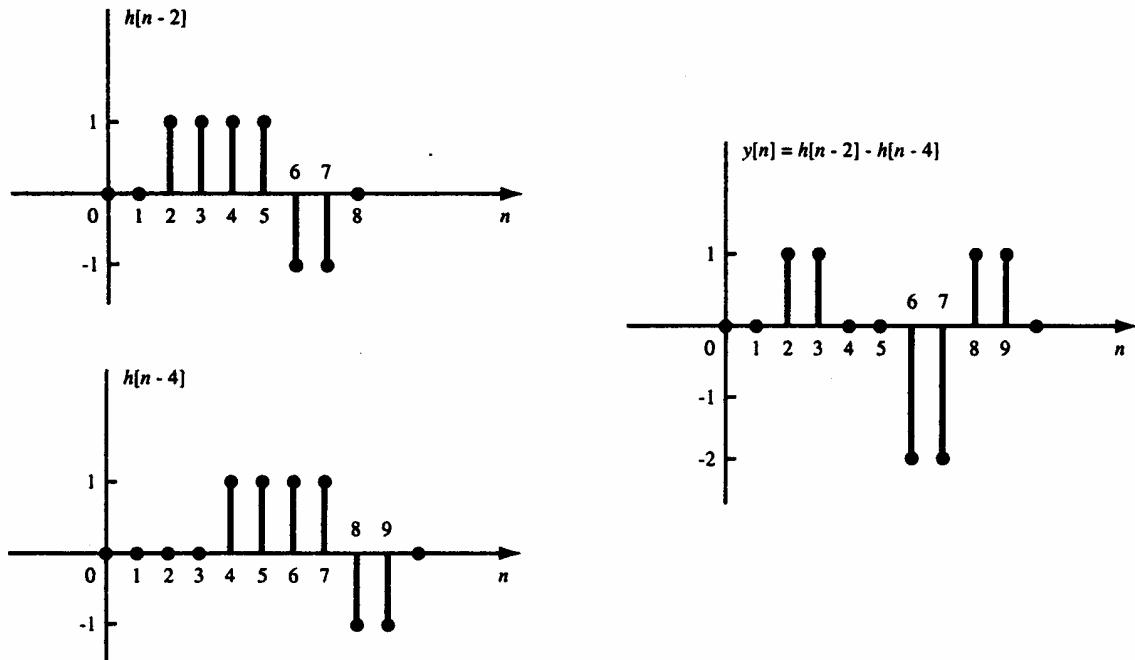
(b)

Şekil 2-26

Sistem doğrusal ve zamanla değişmez olduğundan dürtü tepkisinin tanımı uyarınca  $y[n]$  çıkış tepkisinin

$$y[n] = h[n - 2] - h[n - 4]$$

birimde olduğu görülmektedir. Bu sonuç Şekil 2-27'de çizilmiştir.



Şekil 2-27

- 2.35.** Herhangi bir  $n_0$  için  $y[n]$  çıkış dizisinin  $n=n_0$  daki değeri;  $x[n]$  girişinin yalnızca  $n \leq n_0$  için olan değerlerine bağımlıysa, bu ayrik zamanlı sistem nedenseldir. (bkz.Böl.1.5D). Bu tanımı kullanarak ayrik zamanlı, DZD bir sistem için Eşitlik (2.44) ile verilen  $n < 0$  için  $h[n]=0$  nedensellik şartını elde ediniz.

Eşitlik (2.39) kullanılarak

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \end{aligned} \quad (2.139)$$

yazılabilir. Burada ilk toplama teriminin  $x[n]$ 'nin gelecekteki değerlerinin ağırlıklı bir toplamı olduğuna dikkat ediniz. O halde, sistem nedensel ise

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] = 0$$

olmalıdır. Bunun doğru olması için de

$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

doğru olmalıdır.  $n < 0$  için  $h[n] = 0$  ise Eşitlik (2.139)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

biçimine dönüşür. Bu ilişki de  $y[n]$  çıkışının yalnızca geçmişteki ve o andaki giriş değerlerine bağlı olduğunu gösterir.

- 2.36.**  $x[n]$  girişi ile  $y[n]$  çıkışı arasındaki ilişkisi aşağıdaki tanımlanan ayrik zamanlı, DZD bir sistem kararlı mıdır?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n}x[k+1]$$

Tanım (2.30) ve Eşitlik (1.48) uyarınca sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisi

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n}\delta[k+1] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{-(n+1)}\delta[k+1] = 2^{-(n+1)} \sum_{k=-\infty}^n \delta[k+1]$$

olarak ifade edilebilir.  $k+1=m$  dönüşümü yapılrsa Eşitlik (1.50) uyarınca

$$h[n] = 2^{-(n+1)} \sum_{m=-\infty}^{n+1} \delta[m] = 2^{-(n+1)}u[n+1] \quad (2.140)$$

olacaktır. Bu ifadeden  $h[-1] = u[0] \neq 0$  olduğu görüldüğünden sistem nedensel değildir.

- 2.37.** Ayrik zamanlı, DZD sistemler için SGSÇ kararlılık koşulunun [Eşitlik (2.49)] sağlandığını gösteriniz.

Ayrik zamanlı, DZD bir sistemin  $x[n]$  girişi

$$|x[n]| \leq k_1 \quad (2.141)$$

birimde sınırlı olsun. Eşitlik (2.35) kullanılarak ve Eşitlik (2.141) gereği  $|x[n-k]| \leq k_1$  olduğundan

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq k_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

yazılabilir. O halde dürtü tepkisi mutlak toplanabilir ise, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = K < \infty$$

ise

$$|y[n]| \leq k_1 K = k_2 < \infty$$

olacağından sistem SGSÇ anlamında kararlıdır.

- 2.38.** Ayrik zamanlı, DZD bir sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisi aşağıda verilmiştir.

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

- (a) Bu sistem nedensel midir?  
 (b) Bu sistem SGSÇ anlamında kararlı mıdır?

(a)  $n < 0$  için  $h[n] = 0$  olduğundan sistem nedenseldir.

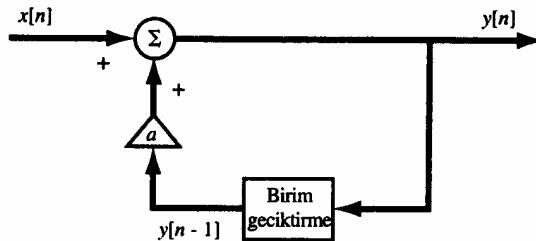
(b) Prob. 1.19'daki Eşitlik (1.91) kullanılarak

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha^k u[n]| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k = \frac{1}{1 - |\alpha|} \quad |\alpha| < 1$$

yazılabilir. O halde bu sistem  $|\alpha| < 1$  ise SGSÇ anlamında kararlı,  $|\alpha| \geq 1$  ise kararsızdır.

### FARK DENKLEMLERİYLE TANIMLANAN SİSTEMLER

**2.39.** Şekil 2-28'deki ayrık zamanlı sistem bir birim geciktirme elemanı ve bir skalar çarpcılarından oluşmuştur.  $y[n]$  çıkışı ve  $x[n]$  girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan fark denklemini yazınız.



Şekil 2-28

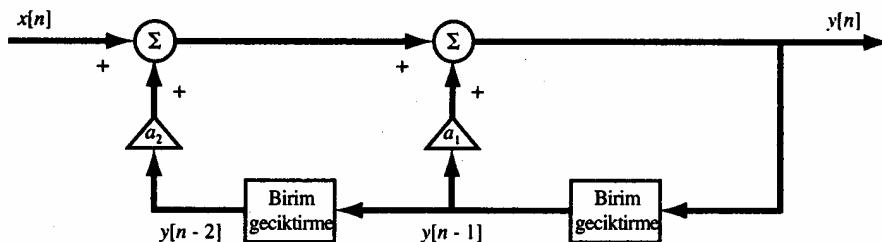
Şekil 2-28'deki birim geciktirme elemanın çıkışı  $y[n-1]$  olduğundan

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \quad (2.142)$$

$$\text{ya da} \quad y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (2.143)$$

yazılabilir. Bu, istenen birinci mertebeden fark denklemidir.

**2.40.** Şekil 2-29'daki ayrık zamanlı sistem iki birim geciktirme elemanı ve bir skalar çarpcılarından oluşmuştur.  $y[n]$  çıkışı ve  $x[n]$  girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan fark denklemini yazınız.



Şekil 2-29

Şekil 2-29'daki sağdan birinci birim geciktirme elemanın çıkışı  $y[n-1]$ , sağdan ikinci birim geciktirme elemanın çıkışı ise  $y[n-2]$  dir. O halde

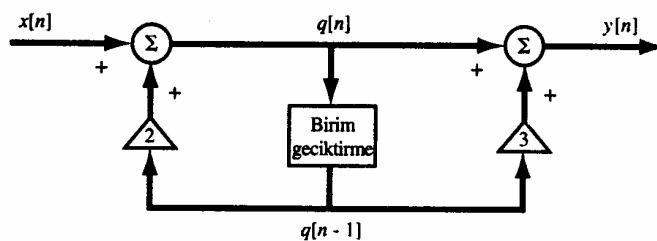
$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \quad (2.144)$$

ya da  $y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = x[n] \quad (2.145)$

yazılabilir. Bu, istenen ikinci mertebe fark denklemidir.

Not: Genel olarak, birim geciktirme elemanlarının ve skalar çarpıcıların bağlanmasıından oluşan ayrik zamanlı, DZD bir sistemin mertebesi, sistemdeki birim geciktirme elemanlarının sayısına eşittir.

- 2.41.** Şekil 2-30'daki sistemde  $y[n]$  çıkışı ile  $x[n]$  girişi arasındaki ilişkiyi veren fark denklemini yazınız.



Şekil 2-30

Şekil 2-30'daki birim geciktirme elemanın girişini  $q[n]$  olsun. Bu durumda

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n] \quad (2.146a)$$

$$y[n] = q[n] + 3q[n-1] \quad (2.146b)$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten  $q[n]$  ve  $q[n-1]$ ,  $x[n]$  ve  $y[n]$  cinsinden çözülebilir.

$$q[n] = \frac{2}{5}y[n] + \frac{3}{5}x[n] \quad (2.147a)$$

$$q[n-1] = \frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] \quad (2.147b)$$

Eşitlik (2.147a)'da  $n \rightarrow (n-1)$  değişikliği yapılırsa

$$q[n-1] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1] \quad (2.147c)$$

elde edilir. Eşitlik (2.147b) ve Eşitlik (2.147c) birbirine eşitlenerek

$$\frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1]$$

ve yeniden düzenleme ile

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1] \quad (2.148)$$

elde edilir. Bu, istenen fark denklemidir.

- 2.42.**  $x[n]$  girişi ile  $y[n]$  çıkışı arasındaki ilişkisi aşağıda verilen ayrik zamanlı, DZD bir sistemi ele alalım. Burada  $a$  bir sabittir.

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (2.149)$$

$y[-1]=y_{-1}$  yardımcı koşulu altında aşağıda verilen giriş için  $y[n]$ 'yi bulunuz.

$$\begin{aligned} x[n] &= Kb^n u[n] \\ y[n] &= y_p[n] + y_h[n] \end{aligned} \quad (2.150)$$

olsun. Burada  $y_p[n]$ , Eşitlik (2.149)'u sağlayan bir özel çözüm ve  $y_h[n]$  ise

$$y[n] - ay[n-1] = 0 \quad (2.151)$$

homojen denklemini sağlayan homojen çözümüdür.

$$y_p[n] = Ab^n \quad n \geq 0 \quad (2.152)$$

ile tanımlanan  $y_p[n]$  çözümü Eşitlik (2.149)'da yerine konursa elde edilecek

$$Ab^n - aAb^{n-1} = Kb^n$$

ifadesinden  $A = Kb/(b-a)$  ve

$$y_p[n] = \frac{K}{b-a} b^{n+1} \quad n \geq 0 \quad (2.153)$$

bulunur.  $y_h[n]$ 'yi elde etmek için

$$y_h[n] = Bz^n$$

olduğunu varsayılmı. Bunu Eşitlik (2.151)'de yerine koymakla elde edilen

$$Bz^n - aBz^{n-1} = (z-a)Bz^{n-1} = 0$$

eşitliğinden  $z = a$  ve

$$y_h[n] = Ba^n \quad (2.154)$$

bulunur.  $y_p[n]$  ve  $y_h[n]$ 'nin birleştirilmesi ile

$$y[n] = Ba^n + \frac{K}{b-a} b^{n+1} \quad n \geq 0 \quad (2.155)$$

elde edilir. Eşitlik (2.155)'deki B'nin saptanması için  $y[0]$ 'ın değeri gereklidir. Eşitlik (2.149) ve (2.150)'de  $n = 0$  yapılması

$$y[0] - ay[-1] = y[0] - ay_{-1} = x[0] = K$$

$$\text{ya da} \quad y[0] = K + ay_{-1} \quad (2.156)$$

olur. Eşitlik (2.155)'de  $n=0$  yapılması

$$y[0] = B + K \frac{b}{b-a} \quad (2.157)$$

elde edilir. Eşitlik (2.156) ve (2.157) birbirine eşitlenirse elde edilecek

$$K + ay_{-1} = B + K \frac{b}{b-a}$$

ilişkisinden

$$B = ay_{-1} - K \frac{a}{b-a}$$

olarak hesaplanır. O halde denkl.(2.155)

$$y[n] = y_{-1} a^{n+1} + K \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \quad n \geq 0 \quad (2.158)$$

büçiminde ifade edilir.  $n < 0$  için  $x[n]=0$  olup Eşitlik (2.149), Eşitlik (2.151)'e dönüşür. O halde

$$y[n] = Ba^n \quad (2.159)$$

$y[-1] = y_{-1}$  yardımcı koşulu

$$y[-1] = y_{-1} = Ba^{-1}$$

olarak yazılabilir. buradan  $B = y_{-1} / a$  bulunur.

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} \quad n < 0 \quad (2.160)$$

Eşitlik (2.158) ve (2.160)'nın birleştirilmesi sonucu  $y[n]$  için çözüm bulunur.

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} + K \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} u[n] \quad (2.161)$$

Not: Sürekli zaman sistemlerindeki gibi (Prob. 2-21 ve 2.22), Eşitlik (2.149) ile tanımlanan sistem, eğer  $y[-1] \neq 0$  ise doğrusal değildir. Sistem başlangıçta durgun ise yani  $y[-1]=0$  ise nedensel ve zamanla değişmezdir. Ayrıca, Eşitlik (2.149) tekrarlı biçimde de çözülebilir (bkz.Prob.2.43).

**2.43.** Prob.2.42'deki ayrik zamanlı sistemin  $x[n]=K\delta[n]$  ve  $y[-1]=y_{-1}=\alpha$  için  $y[n]$  çıkışını bulunuz.

Eşitlik (2.149),  $n \geq 0$  için  $y[n]$ 'nin birbirini izleyen değerleri hesaplanarak şöyle çözülebilir: Eşitlik (2.149) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \quad (2.162)$$

Bunun sonucunda

$$\begin{aligned} y[0] &= ay[-1] + x[0] = a\alpha + K \\ y[1] &= ay[0] + x[1] = a(a\alpha + K) \\ y[2] &= ay[1] + x[2] = a^2(a\alpha + K) \\ &\vdots \\ y[n] &= ay[n-1] + x[n] = a^n(a\alpha + K) = a^{n+1}\alpha + a^nK \end{aligned} \quad (2.163)$$

elde edilir. Benzer biçimde  $n < 0$  için  $y[n]$ 'nin hesabında Eşitlik (2.149) yeniden şöyle düzenlenir.

$$y[n-1] = \frac{1}{a} \{ y[n] - x[n] \} \quad (2.164)$$

Bunun sonucunda

$$\begin{aligned} y[-1] &= \alpha \\ y[-2] &= \frac{1}{a} \{ y[-1] - x[-1] \} = \frac{1}{a}\alpha = a^{-1}\alpha \\ y[-3] &= \frac{1}{a} \{ y[-2] - x[-2] \} = a^{-2}\alpha \\ &\vdots \\ y[-n] &= \frac{1}{a} \{ y[-n+1] - x[-n+1] \} = a^{-n+1}\alpha \end{aligned} \quad (2.165)$$

elde edilir. Eşitlik (2.163) ve (2.165) birleştirilerek  $y[n]$  bulunur.

$$y[n] = a^{n+1}\alpha + Ka^n u[n] \quad (2.166)$$

**2.44.** Prob.2.43'deki ayrik zamanlı sistem başlangıçta durgun durumda ise

- (a) Sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisini bulunuz.
- (b) Sistemin  $s[n]$  basamak tepkisini bulunuz.
- (c) Şik (b) sonucundan yararlanarak  $h[n]$  dürtü tepkisini bulunuz.
- (d) Eşitlik (2.166)'da  $K=1$  ve  $y[-1]=\alpha=0$  yapılrsa:

$$h[n] = a^n u[n] \quad (2.167)$$

- (e) Eşitlik (2.161)'de  $K=1$ ,  $b=1$  ve  $y[-1]=y_{-1}=0$  yapılrsa:

$$s[n] = \left( \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) u[n] \quad (2.168)$$

- (f) Eşitlik (2.41) ve (2.168)'den yararlanarak  $h[n]$  dürtü tepkisi

$$h[n] = s[n] - s[n-1] = \left( \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) u[n] - \left( \frac{1 - a^n}{1 - a} \right) u[n-1]$$

olarak ifade edilebilir.  $n = 0$  için

$$h[0] = \left( \frac{1 - a}{1 - a} \right) u[0] = 1$$

$n \geq 1$  için

$$h[n] = \frac{1}{1-a} [1 - a^{n+1} - (1 - a^n)] = \frac{a^n(1-a)}{1-a} = a^n$$

olacaktır. O halde

$$h[n] = a^n u[n]$$

olup bu, Eşitlik (2.167)'de bulunan sonuç ile aynıdır.

**2.45.** Aşağıda verilen nedensel, DZD, ayrik zamanlı sistemlerin her birisi için  $h[n]$  dürtü tepkisini bularak bunun FIR ya da IIR sistemi olduğunu belirtiniz.

- (a)  $y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3]$
- (b)  $y[n] + 2y[n-1] = x[n] + x[n-1]$
- (c)  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-2] = 2x[n] - x[n-2]$

- (d) Tanım (2.56) uyarınca

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

ya da

$$h[n] = \{1, 0, -2, 1\}$$

yazılabilir.  $h[n]$  yalnızca dört terim içerdığından bu bir FIR sistemidir.

$$(b) \quad h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

sistem nedensel olduğundan  $h[-1] = 0$ 'dır. Böylece

$$h[0] = -2h[-1] + \delta[0] + \delta[-1] = \delta[0] = 1$$

$$h[1] = -2h[0] + \delta[1] + \delta[0] = -2 + 1 = -1$$

$$h[2] = -2h[1] + \delta[2] + \delta[1] = -2(-1) = 2$$

$$h[3] = -2h[2] + \delta[3] + \delta[2] = -2(2) = -2^2$$

⋮

$$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1] = (-1)^n 2^{n-1}$$

O halde,

$$h[n] = \delta[n] + (-1)^{n-1} u[n-1]$$

$h[n]$ , sonsuz terim içerdiginden bu bir IIR sistemidir.

$$(c) \quad h[n] = \frac{1}{2}h[n-2] + 2\delta[n] - \delta[n-2]$$

Sistem nedensel olduğundan  $h[-2] = h[-1] = 0$ 'dır. Böylece

$$h[0] = \frac{1}{2}h[-2] + 2\delta[0] - \delta[-2] = 2\delta[0] = 2$$

$$h[1] = \frac{1}{2}h[-1] + 2\delta[1] - \delta[-1] = 0$$

$$h[2] = \frac{1}{2}h[0] + 2\delta[2] - \delta[0] = \frac{1}{2}(2) - 1 = 0$$

$$h[3] = \frac{1}{2}h[1] + 2\delta[3] - \delta[1] = 0$$

⋮

O halde,

$$h[n] = 2\delta[n]$$

$h[n]$ , yalnızca bir terim içerdiginden bu bir FIR sistemidir.

## Ek Problemler

**2.46.** Aşağıdaki sinyal çiftleri için  $y(t) = x(t)*h(t)$  konvolüsyonunu bulunuz.

$$(a) \quad x(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \leq a \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \leq a \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$(b) \quad x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq T \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 2T \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$(c) \quad x(t) = u(t-1), \quad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$\text{Yanıt: } (a) \quad y(t) = \begin{cases} 2a - |t| & |t| < 2a \\ 0 & |t| \geq 2a \end{cases}$$

$$(b) \quad y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 < t \leq T \\ \frac{1}{2}T^2 & T < t \leq 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2T - \frac{5}{2}T^2 & 2T < t \leq 3T \\ 0 & 3T < t \end{cases}$$

$$(c) \quad \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)$$

**2.47.** Aşağıdaki dizi çiftleri için  $y(n) = x[n]*h[n]$  konvolüsyonunu bulunuz.

- (a)  $x[n] = u[n], h[n] = 2^n u[-n]$
- (b)  $x[n] = u[n] - u[n - N], h[n] = \alpha^n u[n], 0 < \alpha < 1$
- (c)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n], h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - 1]$

*Yanıt:*

$$(a) \quad y[n] = \begin{cases} 2^{1-n} & n \leq 0 \\ 2 & n > 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & 0 \leq n \leq N - 1 \\ \alpha^{n-N+1} \left( \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \right) & N - 1 < n \end{cases}$$

$$(c) \quad y[n] = \delta[n]$$

**2.48.**  $y(t) = x(t)*h(t)$  ise aşağıdakiniin doğruluğunu gösteriniz.

$$y'(t) = x'(t)*h(t) = x(t)*h'(t)$$

*İpucu:* Eşitlik (2.6) ve (2.10)'un  $t$ 'ye göre türevlerini alınız.

**2.49.**  $x(t)*\delta'(t) = x'(t)$

olduğunu gösteriniz.

*İpucu:* Prob.2.48'deki sonucu ve Eşitlik (2.58)'i kullanınız.

**2.50.**  $y(n) = x(n)*h(n)$  ise aşağıdakiniin doğruluğunu gösteriniz.

$$x[n - n_1]*h[n - n_2] = y[n - n_1 - n_2]$$

*İpucu:* Prob.2.3'den yararlanınız.

**2.51.** Herhangi bir  $n_0$  noktasından başlayarak

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x_1[k]x_2[n-k]$$

olduğunu gösteriniz.

*İpucu:* Prob.2.31 ve 2.8'e bakınız.

**2.52.** Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin  $s[t]$  basamak tepkisi

$$s(t) = [\cos \omega_0 t]u(t)$$

ise bu sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisini hesaplayınız.

*Yanıt:*  $h(t) = \delta(t) - \omega_0[\sin \omega_0 t]u(t)$

**2.53.** Şekil 2-31'deki sistem iki altsistemin paralel bağlantısından oluşmuştur. Bu altsistemlerin dürtü tepkileri aşağıdaki gibi verilmiştir.

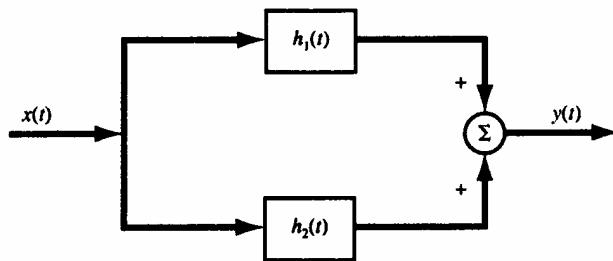
$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad \text{ve} \quad h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$

(a) Tüm sistemin  $h(t)$  dürtü tepkisini bulunuz.

(b) Tüm sistem kararlı mıdır?

*Yanıt:* (a)  $h(t) = (e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)$

(a) Evet



Şekil 2-31

**2.54.**  $x(t)$  girişi ve  $y(t)$  çıkıştı aşağıdaki gibi ilişkilendirilmiş bir entegratörü ele alalım.

(a) Entegratörün  $h(t)$  dürtü tepkisini bulunuz.

(b) Entegrator kararlı mıdır?

*Yanıt:* (a)  $h(t)=u(t)$

(b) Hayır

**2.55.** Dürtü tepkisi  $h[n]=\delta[n-1]$  olan ayrik zamanlı, DZD bir sistem belleksiz midir?

*Yanıt:* Hayır, sistem belleklidir.

**2.56.** Ayrik zamanlı, DZD bir sistemin dürtü tepkisi

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

olup bu sistemin

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-3]$$

girişi için tepkisi  $y[n]$  ise  $y[1]$  ve  $y[4]$  değerlerini hesaplayınız.

*Yanıt:*  $y[1]=1$  ve  $y[4]=\frac{5}{8}$

**2.57.** Aynır zamanlı, DZD bir sistemin  $h[n]$  dürtü tepkisi aşağıda verilmiştir.

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

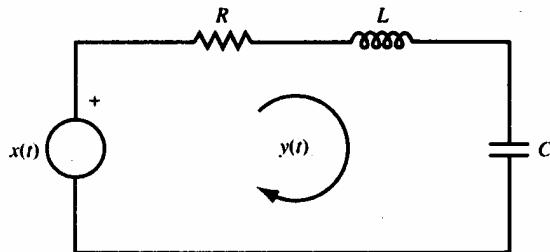
(a) Sistem nedensel midir?

(b) Sistem kararlı mıdır?

*Yanit:* (a) Evet; (b) Evet

**2.58.** Şekil 2.32'deki RLC devresi için  $y(t)$  çıkışını  $x(t)$  girişine ilişkilendiren türevsel denklemi elde ediniz.

$$\text{Yanit: } \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{L} \frac{dx(t)}{dt}$$



Şekil 2-32

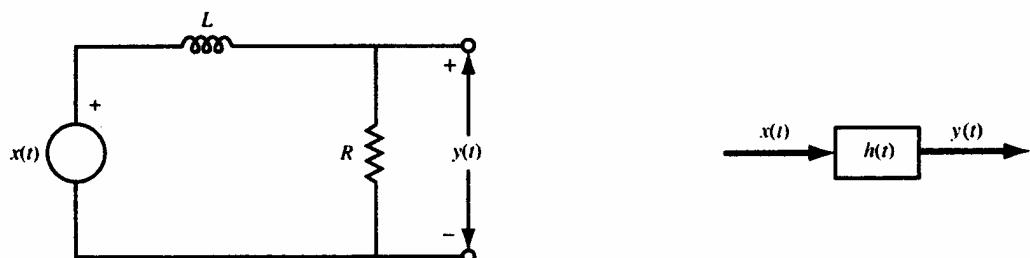
**2.59.** Şekil 2.33'deki devreyi ele alalım.

- (a)  $R$ 'nın uçlarındaki  $y(t)$  çıkış gerilimini  $x(t)$  giriş gerilimine ilişkilendiren türevsel denklemi bulunuz.  
 (b) Devrenin  $h(t)$  dürtü tepkisini bulunuz.  
 (c) Devrenin  $s(t)$  basamak tepkisini bulunuz.

$$\text{Yanit: (a) } \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L}y(t) = \frac{R}{L}x(t)$$

$$(b) h(t) = \frac{R}{L}e^{-(R/L)t}u(t)$$

$$(c) s(t) = [1 - e^{-(R/L)t}]u(t)$$



Şekil 2-33

**2.60.** Prob. 2.20'deki sistemde  $x(t) = e^{-at} u(t)$  ve  $y(0) = 0$  ise  $y(t)$  çıkışını hesaplayınız.

*Yanit:*  $te^{-at} u(t)$

**2.61.**

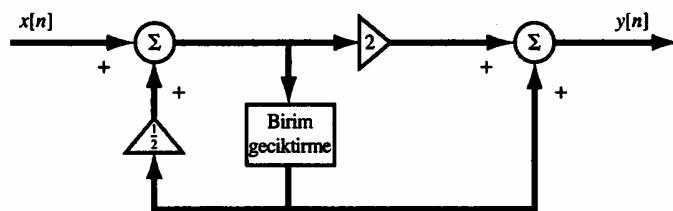
$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) + 2 = x(t)$$

türevsel denklemi ile tanımlanan sistem doğrusal mıdır?

*Yanit:* Hayır, doğrusal değildir.

**2.49.** Şekil 2-34'de gösterilen sistemin giriş-çıkış denklemini yazınız.

*Yanit:*  $2y[n] - y[n - 1] = 4x[n] + 2x[n - 1]$



Şekil 2-34

**2.50.** Dörtü tepkisi

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilen ayrik zamanlı, DZD bir sistemin giriş-çıkış ilişkisini bulunuz.

*Yanit:*  $y[n] = x[n] + x[n - 1]$

**2.51.**  $y[-1]=0$  olan ayrik zamanlı, DZD bir sistemin fark denklemi

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n - 1] = x[n]$$

olarak verilmiş ise aşağıdaki girişler için  $y[n]$  çıkışını saptayınız.

(a)  $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n];$

(b)  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

*Yanit:* (a)  $y[n] = 6[(\frac{1}{2})^{n+1} - (\frac{1}{3})^{n+1}]u[n]$

(b)  $y[n] = (n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]$

**2.52.** Prob.2.42'yi tekrar ele alalım. Sistemin özfonsiyonunu ve buna ilişkin özdeğerini bulunuz.

*Yanit:*  $z^n, \lambda = \frac{z}{z-a}$